PERWIRA JOURNAL OF SCIENCE & ENGINEERING
Vol. 2 (2) 2022, 14-18

ISSN Online 2775-8486

Bentuk umum dan rekursif bilangan catalan dari bilangan catalan modulo prima berpangkat bilangan bulat positif

Irfan Azkamahendra[1], **Agus Sugandha**[1]
[1]Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman, Purwokerto

Penulis Korespondensi : Agus Sugandha (e-mail: agus.sugandha@unsoed.ac.id)

Abstrak
Bentuk Umum dan Rekursif Bilangan Catalan Serta Bilangan Catalan Modulo Prima Berpangkat Bilangan Bulat Positif. Bilangan Catalan adalah suatu bilangan positif yang diperoleh dengan menghitung struktur kombinasi dari suatu barisan. Bilangan Catalan memiliki bentuk umum serta bentuk rekursif yang dapat di ketahui melalui *Diagonal-Avoiding Paths* dan *Balanced Parentheses*.. Bilangan Catalan memiliki kekongruenan pada modulo bilangan bulat. Salah satunya pada modulo bilangan prima p. Untuk setiap p prima ganjil, p tidak membagi habis C_{p^k-1} dan perkalaian seluruh bilangan d dengan d diantara 0 sampai p^k dan factor persekutuan terbesar d dan p adalah 1, akan kongruen dengan -1 modulo p^k. Untuk setiap a bilangan bulat dengan a diantara 0 sampai $\frac{1}{2}(p+1)$, bilangan catalan $C_{P^1-a}, \ldots, C_{P^k-a}$ memiliki nilai berbeda pada modulo p^k dan C_{P^n-a} kongruen dengan C_{P^n-a} dan seterusnya sampai C_{P^k-a} modulo p^k. Untuk a diantara $(p+1)$ sampai p , bilangan catalan $C_{P^1-a}, \ldots, C_{P^{k+1}-a}$ memiliki nilai berbeda pada modulo p^k dan C_{P^n-a} kongruen dengan $C_{P^{n-1}-a}$ dan seterusnya sampai $C_{P^{k+1}-a}$ moulo p^{k+1}.

Kata kunci: Bilangan Catalan, Kombinasi, Kekongruenan, Bilangan Prima, Modulo.

1. *PENDAHULUAN*

Barisan adalah daftar urutan bilangan dari kiri ke kanan yang mempunyai karakteristik atau pola tertentu. Salah satu barisan bilangan yang terkenal adalah barisan bilangan Catalan. Bilangan Catalan (*Catalan number*) adalah suatu bilangan bulat positif yang diperoleh dengan menghitung struktur kombinasi dari suatu barisan. Bilangan Catalan ditemukan pada tahun 1844 oleh seorang matematikawan asal Belgia, Eugène Charles Catalan, ketika mempelajari bentuk barisan *parentheses* (barisan bentuk kurung). Bilangan Catalan C_n memiliki definisi secara rekrusif dengan $C_0 = 1$, $C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i \cdot C_{n-i}$.

Bilangan Catalan kongruen pada modulo bilangan bulat. Jika m suatu bilangan bulat positif, maka a kongruen dengan b modulo m (ditulis $a \equiv b\ (mod\ m)$) bila m membagi $(a-b)$. Jika m tidak membagi $(a-b)$ maka dikatakan bahwa a tidak kongruen dengan b modulo m (ditulis $a \not\equiv b\ (mod\ m)$) (Sukirman, 2006). Hubungan antara kekongruenan dan bilangan Catalan terus berkembang dari masa ke masa. Berkembangnya ilmu ini diikuti dengan banyaknya penelitian tentang bilangan Catalan yang membahas bentuk-bentuk bilangan ini. Misalnya, Sen-Peng Eu dkk (2007) "*Catalan and Motzkin numbers modulo 4 and 8*. Hsueh-Yung Lin (2012) "*Odd Catalan Numbers Modulo* 2^k".

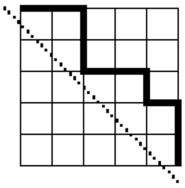
Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan oleh Hsueh-Yung Lin (2012) akan diteliti tentang bilangan Catalan prima berpangkat k. Sehingga penelitian ini memperluas hasil yang sudah diteliti sebelumnya. Mengingat manfaat yang didapat dengan melanjutkan penelitian tersebut dalam pengembangan bilangan Catalan pada teori bilangan.

2. *METODE*

Metodologi penelitian pada paper ini adalah study literature dengan cara penulusuran jurnal yang terkait dengan barisan bilangan Catalan, kemudian dari jurnal tersebut dipilih jurnal yang sesuai dengan tema dari barisan bilangan Catalan. Berdasarkan Barisan bilangan Catalan tersebut kemudian dicari kekongruenan nya dengan bilangan prima berpangkat bilangan bulat positif menggunakan teorema Legendre.

3. *HASIL DAN PEMBAHASAN*

Diagonal-Avoiding Paths adalah kondisi dalam petak $n \times n$ di mana terdapat jalur yang memiliki panjang $n+m$ yang mengarah dari sudut kiri atas ke sudut kanan bawah dan tidak menyentuh garis diagonal dari kiri atas ke kanan bawah. Dengan kata lain, berapa banyak jalur tetap di atas diagonal utama? Perhatikan gambar 4.1



Gambar 1. Ilustrasi jalur tidak melewati diagonal

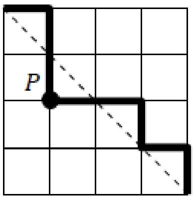
Banyaknya cara dapat dihitung sebagai berikut. Setiap jalur bisa merupakan jalur ke kanan atau jalur ke bawah. Karena jalur tersebut mempunyai panjang $n+m$ dengan panjang jalur ke kanan tepat n dan panjang jalur ke bawah tepat m, maka banyaknya jalur dengan panjang m+n sama dengan banyaknya cara memlilih n objek dari $m+n$ objek. Banyaknya jalur tersebut adalah

$$\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{n!\cdot m!}.$$

Jika m sama dengan n maka banyaknya cara adalah

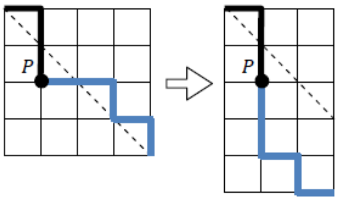
$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\cdot n!}.$$

Perhatikan kondisi berikut ini,



Gambar 2. Kondisi melewati diagonal

Dalam banyaknya cara menentukan jalur dengan $m=n$ selalu terdapat kemungkinan bahwa jalur tersebut akan melalui diagonal. Hal tersebut akan menyalahi aturan bahwa jalur tidak dapat melalui diagonal. Hal tersebut dapat diubah dengan cara mencerminkan arah yang ada, sehingga didapat seperti yang tampak pada Gambar 2.3.



Gambar 3. Pencerminan kondisi melewati diagonal

Jalur semula diubah menjadi jalur pada kotak $(n+1)\times(n-1)$. Sebaliknya, dengan mencari titik P yang sesuai pada kotak $(n+1)\times(n-1)$, yaitu titik paling atas yang berada tepat di bawah diagonal utama, maka tiap jalur pada kotak $(n+1)\times(n-1)$ dapat diubah menjadi jalur pada kotak $(n\times n)$ yang melalui bagian bawah diagonal utama. Jadi, diperoleh banyaknya cara untuk menentukan jalur pada kotak $(n+1)\times(n-1)$ adalah

$$\binom{n+1+n-1}{n-1} = \binom{2n}{n-1}.$$

Karena menghindari jalur yang berpotongan dengan diagonal, maka

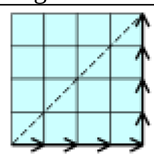
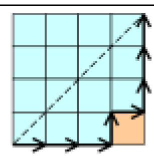
$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} &= \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!} \\
&= \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)n!}. \\
&= \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)n!}.\frac{n}{n} \\
&= \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!\,n}{n(n-1)!\,(n+1)n!} \\
&= \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!\,n}{n!\,n!\,(n+1)} \\
&= \frac{(2n)!}{n!\,n!}.\left(1-\frac{n}{(n+1)}\right) \\
&= \binom{2n}{n}\frac{(n+1)-n}{(n+1)} \\
&= \binom{2n}{n}\frac{1}{(n+1)},
\end{aligned}$$

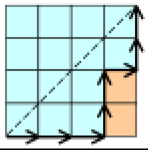
sehingga didapat

$$C_n = \binom{2n}{n}\frac{1}{(n+1)}.$$

a. *Balanced Parentheses*

Balanced Parentheses adalah kondisi di mana terdapat n pasang kurung seimbang. Keseimbangan yang dimaksud terjadi ketika jika dan hanya jika untuk satu buah kurung buka terdapat tepat satu buah kurung tutup. Sebagai contoh "()(())" adalah kurung seimbang, dan "()(()(" bukan kurung seimbang. Berapa banyak cara untuk mendapatkan n pasang kurung seimbang? Menentukan cara mendapatkan kurung seimbang menggunakan analogi dari banyaknya cara pada "*Diagonal-Avoiding Paths*" dengan setiap jalan ke kanan merupakan kurung buka dan ke atas merupakan kurung tutup.

Tabi jalur tidak melewati diagonal pada susunankgsJalur tidak melewati diagonal	Susunan kurung seimbang
	((((()))
	((()()))

	((())())

Sama seperti "*Diagonal-Avoiding Paths*", ada kondisi di mana jumlah kurung buka dan kurung tutup sama, namun tidak memenuhi kriteria kurung seimbang. Berikut beberapa kondisinya "()(()))(, ()())(, (()))(". Untuk menghindari kondisi tersebut, gunakan cara yang sama pada "*Diagonal-Avoiding Paths*", sehingga untuk kasus tanda kurung "()" seimbang, didapat

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n}\frac{1}{(n+1)}$$

yang menyatakan banyaknya cara untuk mendapatkan n pasang kurung seimbang.

Lema 3.1 Untuk setiap bilangan bulat positif k dan bilangan prima ganjil p, berlaku bahwa

$$p \nmid C_{p^k-1}.$$

Bukti. Misalkan $n = p^k$ dan ambil $a_m = C_{n-1}$. Akibatnya,

$$a_p = \binom{2(n-1)}{n-1}\frac{1}{((n-1)+1)} = \binom{2n-2}{n-1}\frac{1}{n}.$$

Untuk $m = p^k$, berlaku bahwa

$$a_{p^k} = \binom{2.p^k-2}{p^k-1}\frac{1}{p^k} = \frac{1}{p^k}.\frac{(2.p^k-2)!}{((p^k-1)!)^2}.$$

Ambil M_1 , M_2 , dan s sebagai pangkat tertinggi dari p yang dapat membagi habis $(2.p^k-2)!$, $(p^k-1)!$, dan a_{p^k}. Teorema *legendre* mengatakan bahwa $v_p(n!)$ adalah pangkat tertinggi dari p yang dapat membagi habis $n!$ yaitu

$$v_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p-1}$$

dengan $S_p(n)$ adalah jumlah tiap digit n pada basis p. Bilangan M_1 adalah pangkat tertinggi dari p yang dapat membagi habis $(2.p^k-2)!$, yaitu

$$M_1 = v_p\big((2.p^k-2)!\big) = \frac{2.p^k - 2 - S_p(2.p^k-2)}{p-1}.$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} S_p(2.p^k-2) &= S_p\big((2.10^k)_p - 2_p\big) \\ &= S_p\left(1\,\underbrace{(p-1)\ldots(p-1)}_{k-1}\,(p-2)\right) \\ = 1 + \underbrace{(p-1)+\cdots+(p-1)}_{k-1} &+ (p-2) = (p-1)k. \end{aligned}$$

Diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} v_p\big((2p^k-2)!\big) &= \frac{2p^k - 2 - (p-1)k}{p-1} \\ &= \frac{2(p^k-1)}{p-1} - k. \end{aligned}$$

Bilangan M_2 adalah pangkat tertinggi dari p yang dapat membagi habis $(p^k-1)!$, yaitu

$$M_2 = v_p\big((p^k-1)!\big) = \frac{p^k - 1 - S_p(p^k-1)}{p-1}.$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} S_p(p^k-1) &= S_p\big((10^k)_p - 1_p\big) \\ &= S_p\left(\underbrace{(p-1)\ldots(p-1)}_{k}\right) \\ = \underbrace{(p-1)+\cdots+(p-1)}_{k} &= (p-1)k. \end{aligned}$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} v_p\big((p^k-1)!\big) &= \frac{p^k - 1 - (p-1)k}{p-1} \\ &= \frac{p^k-1}{p-1} - k. \end{aligned}$$

Bilangan s adalah pangkat tertinggi dari p yang dapat membagi habis $a_{p^k} = \frac{1}{p^k}.\frac{(2.p^k-2)!}{((p^k-1)!)^2}$, yaitu

$$\begin{aligned} s &= M_1 - 2.M_2 - k \\ &= \left(\frac{2(p^k-1)}{p-1} - k\right) \\ &\quad - 2.\left(\frac{p^k-1}{p-1} - k\right) - k \\ &= \left(\frac{2(p^k-1)}{p-1} - k\right) - \left(\frac{2(p^k-1)}{p-1} - 2k\right) \\ &\quad - k = 0. \end{aligned}$$

Karena $s = 0$, dapat disimpulkan bahwa $p \nmid a_{p^k}$. Karena $a_m = C_{n-1}$, maka $p \nmid C_{p^k-1}$. ■

Lema 3.2 Untuk setiap d dan k adalah bilangan bulat positif berlaku

$$\prod_{\substack{0<d<p^k \\ (d,p)=1}} d \equiv -1 \ (mod\ p^k)$$

Bukti. Untuk bilangan bulat positif k, terdapat d dengan $0 < d < p^k$ dan $(d,p) = 1$. Berdasarkan kongruensi linier, karena $(d,p) = 1$, terdapat x dengan $dx \equiv 1\ (mod\ p^k)$. Ambil $x = d'$ sehingga $dd' \equiv 1\ (mod\ p^k)$ dengan $0 < d' < p^k$. Bilangan $d = d'$ jika dan hanya jika $d = 1$ atau $d = p^k - 1$ dengan $0 < d < p^k$. Akibatnya, $d^2 \equiv 1\ (mod\ p^k)$ ekuivalen dengan $(d-1)(d+1) \equiv 0\ (mod\ p^k)$. Diperoleh bahwa $d - 1 \equiv 0\ (mod\ p^k)$ dengan $d = 1$. Diperoleh pula bahwa $d + 1 \equiv 0\ (mod\ p^k)$ dengan $d = p^k - 1$.

Jika bilangan 1 dan $p^k - 1$ dikeluarkan dari batas $0 < d < p^k$, akan mengakibatkan $d \neq d'$. Akibatnya, $dd' \equiv 1\ (mod\ p^k)$ adalah perkalian dari seluruh barisan pada $2 < d < p^k - 2$. Perhatikan bahwa

$$2.3 \ldots (p^k-2) \equiv 1\ (mod\ p^k),$$

$$(p^k-2)! \equiv 1\ (mod\ p^k).$$

Kalikan kedua ruas dengan $p^k - 1$, sehingga

$$(p^k-1)(p^k-2)! \equiv (p^k-1)\ (mod\ p^k),$$

$$(p^k-1)! \equiv -1\ (mod\ p^k),$$

$$\prod_{\substack{0<d<p^k \\ (d,p)=1}} d \equiv -1\ (mod\ p^k).$$

Dengan demikian, Lema 4.2 terbukti. ■

Lema 3.3 Untuk setiap a dan i adalah bilangan bulat positif dengan $0 \le a \le p$ dan $i > 0$ berlaku bahw :

(1) untuk $0 \le a < \frac{1}{2}(p+1)$,

$$C_{p^{i+1}-a} \equiv C_{p^i-a}\ (mod\ p^i)\ ,\quad C_{p^{i+1}-a} \not\equiv C_{p^i-a}\ (mod\ p^{i+1});$$

(2) untuk $\frac{1}{2}(p+1) \leq a < p$,

$$C_{p^{i+1}-a} \equiv C_{p^i-a}\ (mod\ p^{i-1})\ ,\quad C_{p^{i+1}-a} \not\equiv C_{p^i-a}\ (mod\ p^i).$$

Bukti.

(1) Untuk $a = 0, o(n) \coloneqq \frac{n}{p^\alpha}$ dengan $p^\alpha \mid n$ dan $p^{\alpha+1} \nmid n$, Dengan menggunakan Lema 4.1, didapat bahwa

$$C_{p^i-0} = C_{p^i} = \frac{(2p^i)!}{(p^i+1)!\,p^i!}$$
$$= \frac{(2p^i)(2p^i-1)(2p^i-2)!}{(p^i+1)p^i!\,p^i(p^i+1)!}$$
$$= \frac{(2p^i)(2p^i-1)}{(p^i+1)p^i} C_{p^i-1}$$
$$= \frac{2(2p^i-1)}{(p^i+1)} C_{p^i-1}.$$

Karena $p \nmid C_{p^i}$, maka

$$(p^i+1)C_{p^i} = \frac{o\left((2p^i)!\right)}{\left(o\left((p^i)!\right)\right)^2}. \qquad (1)$$

Ubah indeks i menjadi $i+1$, sehingga

$$(p^{i+1}+1)C_{p^{i+1}} = \frac{o\left((2p^{i+1})!\right)}{\left(o\left((p^{i+1})!\right)\right)^2} \qquad (2)$$

dengan

$$(p^{i+1})! = \prod_{\substack{0<d<p^i \\ (d,p)=1}} d\ .\prod_{v=1}^{p^i} v.p^i.$$

Diperoleh bahwa

$$o\left((p^{i+1})!\right) \equiv -o\left((p^i)!\right)\ (mod\ p^{i+1}). \qquad (3)$$

Demikian juga

$$o\left((2p^{i+1})!\right) \equiv -o\left((2p^i)!\right)\ (mod\ p^{i+1}). \qquad (4)$$

Dengan menggunakan Persamaan (1), (2), (3), dan (4), didapat bahwa

$$(p^i+1)C_{p^i} \equiv (p^{i+1}+1)C_{p^{i+1}}\ (mod\ p^{i+1}),$$
$$(p^{i+1}+1)C_{p^{i+1}} \equiv (p^i+1)C_{p^i} (mod\ p^{i+1}),$$
$$C_{p^{i+1}} \equiv -(p^i+1)C_{p^i} (mod\ p^{i+1}),$$
$$C_{p^{i+1}} \equiv (1-p^i)C_{p^i} (mod\ p^{i+1}).$$

Ubah indeks $i+1$ menjadi i, sehingga

$$C_{p^{i+1}} \equiv (1-0)C_{p^i} (mod\ p^i)$$
$$C_{p^{i+1}} \equiv C_{p^i}\ (mod\ p^i).$$

Dengan demikian, Lema 4.3 terbukti untuk $a = 0$.

Untuk $a = 1, o(n) \coloneqq \frac{n}{p^\alpha}$ dengan $p^\alpha \mid n$ dan $p^{\alpha+1} \nmid n$.

Dengan menggunakan Lema 4.16, didapat bahwa

$$2(2p^{i+1}-1)C_{p^{i+1}-1} = 2(2p^{i+1}-1)\frac{(2(p^{i+1}-1))!}{\left((p^{i+1}-1)+1\right)!\,(p^{i+1}-1)!}$$
$$= \frac{2.(2p^{i+1}-1)!}{(p^{i+1})!\,(p^{i+1}-1)!}$$
$$= \frac{o(2.(2p^{i+1}-1)!)}{o\left((p^{i+1})!\right)o((p^{i+1}-1)!)}$$

$$2(2p^{i+1}-1)C_{p^{i+1}-1} = \frac{o\left((2p^{i+1})!\right)}{\left(o\left((p^{i+1})!\right)\right)^2} \qquad (5)$$

Ubah indeks $i+1$ menjadi i , sehingga

$$2(2p^i-1)C_{p^i-1} = \frac{o\left((2p^i)!\right)}{\left(o\left((p^i)!\right)\right)^2} \qquad (6)$$

dengan

$$(p^{i+1})! = \prod_{\substack{0<d<p^i \\ (d,p)=1}} d\ .\prod_{v=1}^{p^i} v.p^i.$$

Dengan menggunakan Lema 4.2, didapat bahwa

$$o\left((p^{i+1})!\right) \equiv -o\left((p^i)!\right)\ (mod\ p^{i+1}). \qquad (7)$$

Demikian juga,

$$o\left((2p^{i+1})!\right) \equiv -o\left((2p^i)!\right)\ (mod\ p^{i+1}). \qquad (8)$$

Dengan menggunakan Persamaan (5), (6), (7), dan (8), didapat bahwa

$$2(2p^{i+1}-1)C_{p^{i+1}-1} \equiv 2(2p^i-1)C_{p^i-1}(mod\ p^{i+1}),$$
$$(2p^{i+1}-1)C_{p^{i+1}-1} \equiv (2p^i-1)C_{p^i-1}(mod\ p^{i+1}),$$
$$C_{p^{i+1}-1} \equiv -(2p^i-1)C_{p^i-1}(mod\ p^{i+1}),$$
$$C_{p^{i+1}-1} \equiv (1-2p^i)C_{p^i-1}(mod\ p^{i+1}).$$

Ubah indeks $i+1$ menjadi i , sehingga

$$C_{p^{i+1}-1} \equiv (1-0)C_{p^i-1}(mod\ p^i),$$
$$C_{p^{i+1}-1} \equiv C_{p^i-1}\ (mod\ p^i).$$

Untuk $a = 1$, berlaku bahwa

$C_{p^{i+1}-1} \equiv C_{p^i-1}\ (mod\ p^i)$.

(2) Untuk $2 \leq a < p$,

$$C_{p^i-a} = \frac{(2p^i-2a)!}{(p^i-a+1)!\,(p^i-a)!}$$
$$= \frac{(p^i-a+1)\ldots(p^i-1)(p^i-a+2)\ldots(p^i)(2p^i-2)!}{(2p^i-2a+1)\ldots(2p^i-2)(p^i-1)!\,p^i!}$$
$$= \frac{(p^i-a+1)\ldots(p^i-1)(p^i-a+2)\ldots(p^i)}{(2p^i-2a+1)\ldots(2p^i-2)} C_{p^i-1}. \qquad (9)$$

Berdasarkan Lema 3.1, $p \nmid C_{p^i-1}$ untuk $i \geq 1$. Akibatnya, untuk $2 \leq a < \frac{1}{2}(p+1)$, menurut Persamaan (9),

$$p^i \mid C_{p^i-a}\,, p^{i+1} \nmid C_{p^i-a}$$

atau

$$p^{i+1} \mid C_{p^{i+1}-a}\,, p^{i+2} \nmid C_{p^{i+1}-a}.$$

Dapat disimpulkan bahwa, untuk $2 \leq a < \frac{1}{2}(p+1)$,

$$C_{p^{i+1}-a} \equiv C_{p^i-a} \ (mod\ p^i)\ , C_{p^{i+1}-a} \not\equiv C_{p^i-a} \ (mod\ p^{i+1}).$$

Sedangkan, untuk $\frac{1}{2}(p+1) \leq a < p$, menurut Persamaan (9),

$$p^{i-1} \mid C_{p^i-a}\ , p^i \nmid C_{p^i-a}$$

atau

$$p^i \mid C_{p^{i+1}-a}\ , p^{i+1} \nmid C_{p^{i+1}-a}.$$

Dapat disimpulkan bahwa, untuk $\frac{1}{2}(p+1) \leq a < p$,

$$C_{p^{i+1}-a} \equiv C_{p^i-a} \ (mod\ p^{i-1})\ , C_{p^{i+1}-a} \not\equiv C_{p^i-a} \ (mod\ p^i)$$

Jadi, Lema 3.3 terbukti ■

Teorema 3.4 Untuk setiap p adalah bilangan prima ganjil dan $a,\ k$ adalah bilangan bulat positif dengan $0 \leq a < p$ dan $k > 0$, berlaku bahwa

(1) untuk $0 \leq a < \frac{1}{2}(p+1)$, bilangan Catalan $C_{p^1-a}, \dots, C_{p^k-a}$ memiliki nilai berbeda pada modulo p^k dan $C_{p^n-a} \equiv C_{p^{n-1}-a} \equiv \cdots \equiv C_{p^k-a}\ (mod\ p^k)$;

(2) untuk $\frac{1}{2}(p+1) \leq a < p$, bilangan catalan $C_{p^1-a}, \dots, C_{p^{k+1}-a}$ memiliki nilai berbeda pada modulo p^k dan $C_{p^n-a} \equiv C_{p^{n-1}-a} \equiv \cdots \equiv C_{p^{k+1}-a}\ (mod\ p^{k+1})$.

Bukti. Asumsikan $0 \leq a < \frac{1}{2}(p+1)$. Untuk setiap $u \geq v$ sehingga $p^v \mid p^u$, dengan menggunakan Lema 3.2, maka

$$C_{p^{u+1}-a} \equiv C_{p^u-a}\ (mod\ p^v). \qquad (10)$$

Untuk $1 \leq i < j \leq k$, menggunakan Persamaan (10) dan Lema 4.17, diperoleh bahwa

$$C_{p^j-a} \equiv C_{p^{j-1}-a} \equiv \cdots \equiv C_{p^{i+1}-a} \not\equiv C_{p^i-a}\ (mod\ p^{i+1}). \qquad (11)$$

Karena $p^{i+1} \mid p^k$ dan melihat Persamaan (11), maka

$$C_{p^j-a} \not\equiv C_{p^i-a}\ (mod\ p^k).$$

Berdasarkan Persamaan (10), untuk $> k$, $C_{p^n-a} \equiv C_{p^{n-1}-a} \equiv \cdots \equiv C_{p^k-a}\ (mod\ p^k)$.

Lalu asumsikan $\frac{1}{2}(p+1) \leq a < p$. Untuk setiap $u \geq v$ dengan $p^v \mid p^u$, dengan menggunakan Lema 4.2, maka

$$C_{p^{u+1}-a} \equiv C_{p^u-a}\ (mod\ p^{v-1}). \qquad (12)$$

Berdasarkan Persamaan (12) dan Lema 4.3, untuk $1 \leq i < j \leq k+1$, diperoleh bahwa

$$C_{p^j-a} \equiv C_{p^{j-1}-a} \equiv \cdots \equiv C_{p^{i+1}-a} \not\equiv C_{p^i-a}\ (mod\ p^i). \qquad (13)$$

Karena $p^i \mid p^{k+1}$ dan melihat Persamaan (13), maka

$$C_{p^j-a} \not\equiv C_{p^i-a}\ (mod\ p^{k+1}).$$

Berdasarkan Persamaan (12), untuk $n > k+1$, maka

$$C_{p^n-a} \equiv C_{p^{n-1}-a} \equiv \cdots \equiv C_{p^{k+1}-a}\ (mod\ p^{k+1}).$$

Dengan demikian, Teorema 4.4 terbukti ■

4. *SIMPULAN DAN SARAN*

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah diuraikan pada poin 3, dapat diambil kesimpulan bahwa:

Bentuk rekrusif bilangan Catalan adalah :

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i \cdot C_{n-i}.$$

Bentuk umum bilangan Catalan adalah :

$$C_n = \binom{2n}{n}\frac{1}{(n+1)}.$$

Untuk setiap p adalah bilangan prima ganjil dan a, k adalah bilangan bulat positif dengan $0 \leq a < p$ dan $k > 0$, berlaku bahwa :

(1) untuk $0 \leq a < \frac{1}{2}(p+1)$, bilangan catalan $C_{p^1-a}, \dots, C_{p^k-a}$ memiliki nilai berbeda pada modulo p^k dan $C_{p^n-a} \equiv C_{p^{n-1}-a} \equiv \cdots \equiv C_{p^k-a}\ (mod\ p^k)$;

(2) untuk $\frac{1}{2}(p+1) \leq a < p$, bilangan catalan $C_{p^1-a}, \dots, C_{p^{k+1}-a}$ memiliki nilai berbeda pada modulo p^k dan $C_{p^n-a} \equiv C_{p^{n-1}-a} \equiv \cdots \equiv C_{p^{k+1}-a}\ (mod\ p^{k+1})$.

5. *DAFTAR PUSTAKA*

[1] Burton, D. M. (1980). *Elementary Number Theory.* Boston: Allyn and Bacon, Inc.

[2]Clark, W. E. (2003). *Elementary Number Theory.* Florida: Department of Mathematics University of South Florida.

[3] Legendre, A. M. (1830). *Théorie des Nombres.* Paris: Firmin Didot Frères.

[4]Lin,Hsueh-Yung. (2012). Odd Catalan Numbers Modulo. *Integers*, 161-165.

[5]Rosen, K. H. (1986). *Elementary Number Theory and Its Applications*. London: Addision-Wesley Publishing Company.

[6]Rahmawati, A Sugandha, A Tripena and A Prabowo (2019), The Solution for the Non Linear Diophantine Equation $(7^k-1)^x+(7^k)^y=z^2$ with k as the positive even whole number, *IOP conference series*,volume 1179, 012001

[7]Sen-Peng Eu, Shu-Chung Liu, Yeong-Nan Yeh. (2007). Catalan and Motzkin numbers modulo 4 and 8. *European Journal of Combinatorics*, 1449-1466

[8]Sugandha, A., Tripena, A., Pabowo, A., dan Sukono, F. (2018). Nonlinear Diophantine Equation $11^x+13^y=z^2$. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 332, 012004, 1-4.

[9]Sugandha, A., Tripena, A., Prabowo, A.,(2019), Solutions to Non-Linear Diohnatine Equation $p^x+(p+5)^y=z^2$ with p is Mersenne Prime, *International Journal of Recent Technology and Engineering*, volume 8, 237-238