PERWIRA JOURNAL OF SCIENCE & ENGINEERING
Vol. 2 (2) 2022, 25-31

ISSN Online 2775-8486

Aplikasi model pertumbuhan logistik dalam menentukan proyeksi penduduk di Kabupaten Banyumas

Rosiyanti[1], **Agus Sugandha**[1]
[1]Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman, Purwokerto

Penulis Korespondensi : Agus Sugandha (e-mail: agus.sugandha@unsoed.ac.id)

Abstrak
Kabupaten Banyumas adalah salah satu kabupaten di Jawa Tengah yang memiliki kepadatan penduduk terbanyak ketiga dengan luas wilayah seluas 1.328 km². Berdasarkan data dari BPS jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas setiap tahunnya semakin bertambah, maka diperlukan solusi untuk mengurangi dampak negatif agar tidak terjadi adanya ledakan populasi. Solusi yang dapat digunakan untuk memproyeksi penduduk di Kabupaten Banyumas yaitu dengan menggunakan model pertumbuhan logistik. Model ini digunakan untuk menghitung nilai laju pertumbuhan dan daya dukung lingkungan (carrying capacity) dengan menggunakan data jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas tahun 2015 sampai tahun 2021. Hasil yang diperoleh menunjukan bahwa daya dukung lingkungan (carrying capacity) yang membatasi penduduk di Kabupaten Banyumas adalah 2.127.490,49 dengan laju pertumbuhan relatif pertahunnya sebesar 7,75%. Model ini juga memproyeksikan jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas dari tahun 2022 sampai tahun 2030. Dengan perhitungan menggunakan Microsoft Excel diperoleh proyeksi jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas pada tahun 2022 berjumlah 1.811.059 jiwa hingga tahun 2030 diperkirakan berjumlah 1.944.653 jiwa.

Kata Kunci Kabupaten Banyumas, Model Pertumbuhan Logistik, *carrying capacity.*

1. *PENDAHULUAN*

Indonesia merupakan negara dengan jumlah penduduk yang besar, maka dari itu dibutuhkan perhatian khusus dan penanganan yang baik oleh pemerintah/negara maupun lembaga agar dapat berperan sebagai sumber daya pembangunan. Hal ini pun dapat menimbulkan berbagai masalah, seperti tingkat pengangguran yang tinggi, kemiskinan, dan kelaparan. Salah satu cara untuk mengurangi dampak negatif pertumbuhan penduduk adalah dengan menggunakan proyeksi pertumbuhan penduduk tersebut (Hala et al., 2016).

Pertumbuhan penduduk merupakan pertambahan jumlah penduduk dalam suatu wilayah dan waktu tertentu yang terus menerus akan dipengaruhi oleh jumlah kelahiran bayi dana akan dikurangi oleh jumlah kematian pada semua golongan umur. Hathout (2013) mengasumsikan bahwa laju pertumbuhan penduduk sebanding dengan jumlah penduduk dalam model eksponensial. Penduduk adalah warga negara Indonesia dan orang asing yang berada di Indonesia (Nurkholipah et al., 2017). Tingkat pertumbuhan populasi pada suatu negara akan secara langsung berpengaruh terhadap kondisi ekonomi, politik, budaya dan pendidikan. Maka dari itu perlu dilakukan proyeksi estimasi jumlah penduduk di suatu wilayah termasuk di Kabupaten Banyumas. Proyeksi penduduk penting dalam demografi. Proyeksi penduduk berdasarkan asumsi berusaha untuk memprediksi pola pertumbuhan penduduk di masa depan, dalam bentuk ukuran, kelahiran, migrasi dan tingkat kematian (Dr. R. Ravichandran, 2011).

Kabupaten Banyumas adalah salah satu kabupaten di Jawa Tengah yang memiliki kepadatan penduduk terbanyak ketiga dengan luas wilayah seluas 1.328 km² dan kepadatan penduduk di kabupaten Banyumas tahun 2020 mencapai 1.338 jiwa/km^2 (BPS Kabupaten Banyumas, 2021). Berdasarkan data dari BPS jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas setiap tahunnya semakin bertambah, maka diperlukan solusi untuk mengurangi dampak negatif agar tidak terjadi adanya ledakan populasi

Dalam penelitian ini akan menggunakan model populasi logistik karena dalam hasil penelitian Tsoularis & Wallace (2002) yang berjudul *Analyis of Logistic Growth Models* menyimpulkan bahwa model logistik lebih akurat daripada model ekponensial. Hal yang sama juga dikatakan Iswanto (2012) bahwa keakuratan model logistik lebih mendekati realitas lapangan jika dibandingkan dengan model eksponensial, karena faktor penghambat pertumbuhan penduduk diabaikan pada model ekponensial, sedangkan faktor-faktor penghambat pertumbuhan penduduk pada model logistik sangat diperhatikan seperti peperangan, kelaparan, wabah penyakit dan sebagainya. Di alam, sebagian besar populasi tidak tumbuh secara eksponensial murni karena populasi akan menuju tak terhingga jika waktu menuju tak terhingga. Jadi perlu model yang lebih realistis untuk ini, jika populasi menjadi besar maka mereka akan lebih kompetitif (Waluya, 2006). Data yang digunakan adalah data hasil sensus penduduk di Kabupaten Banyumas tahun 2015 sampai tahun 2021 yang bersumber dari BPS Kabupaten Banyumas.

Berdasarkan uraian latar belakang, rumusan masalah yang akan dikaji adalah bagaimana hasil proyeksi pertumbuhan penduduk di Kabupaten Banyumas dengan menggunakan model populasi logistik dan berapa jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas pada tahun 2022-2030 dari hasil estimasi menggunakan model pertumbuhan logistik. Dari rumusan masalah tersebut dapat dijadikan dasar tujuan penelitian yaitu memperkirakan hasil proyeksi pertumbuhan penduduk di Kabupaten Banyumas dengan menggunakan model populasi logistik dan mengetahui jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas pada tahun 2022-2030

2. *METODLOGI PENELITIAN*

Metodologi Penelitian yang digunakan adalah penelitian jenis studi pustaka dimana metode digunakan dengan cara mempelajari kajian teoretis, referensi serta literatur ilmiah lainnya yang berkaitan dengan budaya, nilai dan norma yang berkembang pada situasi sosial yang diteliti (Sugiyono, 2013) dan metode wawancara yang dilakukan dengan responden pegawai BPS Kabupaten Banyumas. Penelitian ini dilaksanakan selama satu bulan, yaitu pada tanggal 20 Desember 2021 sampai dengan 20 Januari 2022 bertempat di BPS Kabupaten Banyumas. Data yang digunakan peneliti diperoleh dari data jumlah penduduk, dimana jumlah penduduk tersebut merupakan jumlah keseluruhan penduduk yang dimiliki oleh penduduk desa pada setiap kecamatan dari tahun 2015 sampai dengan 2021. Jadi data tersebut merupakan data sekunder yang cukup akurat untuk validasi suatu model matematika.

Tabel 1. Data jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas tahun 2015-2021

Tahun	Jumlah Penduduk
2015	1.635.909
2016	1.650.625
2017	1.665.025
2018	1.679.124
2019	1.840.152
2020	1.776.918
2021	1.789.630

Setelah mengumpulkan data, selanjutnya menganalisa dan mengolah data yang meliputi:

1. Menganalisis dan mengumpulkan data jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas dari hasil sensus penduduk pada tahun 2015-2021.
2. Mencari nilai daya dukung lingkungan (*carrying capacity*) dan laju pertumbuhan relatif tahunan penduduk.
3. Menetapkan model pertumbuhan penduduk di Kabupaten Banyumas.
4. Menghitung nilai proyeksi penduduk di Kabupaten Banyumas tahun 2015-2021 dengan menggunakan model pertumbuhan logistik.
5. Membandingkan hasil Sensus Penduduk dengan hasil proyeksi penduduk menggunakan model pertumbuhan logistik dan direpresentasikan dengan grafik yang dibuat dengan *Microsoft Excel.*
6. Menghitung MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*) dan membandingkan hasilnya dengan hasil Sensus Penduduk dan memrepresentasikannya dengan grafik yang dibuat dengan *Microsoft Excel.*
7. Memprediksi jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas tahun 2022-2030 menggunakan model populasi logistik dari hasil estimasi yang diperoleh.

Memplot pertumbuhan penduduk di Kabupaten Banyumas untuk tahun 2015-2030 menggunakan *Maple*

3. *HASIL DAN PEMBAHASAN*

Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah ilmu matematika yang mensyaratkan fungsi persamaan yang memuat satu atau lebih turunan-turunan dari fungsi yang tidak diketahui. Perhatikan hukum Newton $F = m \cdot a$. Jika $y(t)$ menyatakan posisi partikel bermasa m pada waktu t dan dengan gaya F, maka akan diperoleh

$$\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dt}^2} = \mathrm{F}\left[\mathrm{t}, \mathrm{y}, \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}\right] \quad (1)$$

Dimana gaya F mungkin merupakan fungsi dari t, y, dan kecepatan dy/dt. Persamaan (1) merupakan salah satu contoh persamaan diferensial biasa. Contoh lain misalkan dalam peluruhan zat radio aktif akan diberikan sebagai

$$\frac{\mathrm{dR(t)}}{\mathrm{dt}} = -\mathrm{kR(t)} \quad (2)$$

dimana $R(t)$ adalah jumlah zat radioaktif pada waktu t, dan k adalah konstanta peluruhan. Selanjutnya untuk contoh persamaan diferensial sebagian misalnya persamaan Laplace yang diberikan sebagai

$$\frac{\partial^2 \mathrm{u(x,y)}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{u(x,y)}}{\partial \mathrm{y}^2} = 0 \quad (3)$$

persamaan panas

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 \mathrm{u(x,t)}}{\partial \mathrm{x}^2} = \frac{\partial \mathrm{u(x,t)}}{\partial \mathrm{t}} \quad (4)$$

dimana α adalah konstanta tertentu. Dan juga persamaan gelombang yang diberikan sebagai

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 \mathrm{u(x,t)}}{\partial \mathrm{x}^2} = \frac{\partial^2 \mathrm{u(x,t)}}{\partial \mathrm{t}^2} \quad (5)$$

dengan α konstanta tertentu.

Persamaan (2) merupakan persamaan orde satu, sedangkan persamaan (3), (4), dan (5) merupakan persamaan diferensial berorde dua. Secara umum persamaan diferensial berode n dapat dituliskan sebagai

$$\mathrm{F}\left[\mathrm{t}, \mathrm{u(t)}, \mathrm{u}'(\mathrm{t}), \ldots, \mathrm{u}^{(\mathrm{n})}(\mathrm{t})\right] = 0 \quad (6)$$

Untuk lebih mudahnya dalam persamaan (6) biasanya dapat ditulis y untuk $u(t)$, y' untuk $u'(t)$ dan seterusnya. Maka persamaan (6) ini dapat ditulis sebagi berikut

$$\mathrm{F}\left[\mathrm{t}, \mathrm{y}, \mathrm{y}', \ldots, \mathrm{y}^{(\mathrm{n})}\right] = 0$$

Jadi secara umum persamaan diferensial biasa linear order n diberikan dengan

$$\alpha_0(t)y^{(n)} + \alpha_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_n(t)y = g(t)$$

Model Pertumbuhan Logistik

Pierre-Francois Verhulst seorang ahli matematika biologi dari Belanda pada tahun 1840 mengemukakan bahwa model logistik sebagai model pertumbuhan penduduk dunia (Stewart, 2007). Ketika populasi akan menjadi sangat besar, model Malthus tidak lagi akurat karena tidak mencerminkan fakta bahwa saat ini individu saling bersaing untuk ruang hidup yang terbatas dan ketersediaan sumber daya alam (Minarul Haque et al., 2012). Verhulst menunjukkan bahwa pertumbuhan penduduk tidak hanya tergantung pada ukuran populasi tetapi juga pada sejauh mana ukuran ini dari batas atasnya seperti daya dukung (Wali et al., 2011). Dalam model pertumbuhan logistik diasumsikan bahwa pertumbuhan total rata-rata tergantung pada jumlah penduduk (model linier) atau sama dengan tingkat pertumbuhan per kapita (Henson et al., 2003). Untuk laju pertumbuhan relatif, bentuk yang paling sederhana yang mengakomodasi asumsi ini adalah:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = k\left(1 - \frac{N}{K}\right) \qquad (7)$$

Persamaan (7) dikalikan dengan N, maka untuk pertumbuhan populasi diperoleh model yang dikenal dengan persamaan diferensial logistik yaitu:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \qquad (8)$$

Berdasarkan persamaan (8) dapat diperoleh langkah-langkah solusi persaman logistik berikut ini:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

$$\frac{dN}{N\left(1-\frac{N}{K}\right)} = r\,dt$$

$$\int \frac{dN}{N\left(1-\frac{N}{K}\right)} = \int r\,dt$$

$$\int \frac{dN}{N-\frac{N^2}{K}} = \int r\,dt$$

$$\int \frac{KdN}{KN-N^2} = \int r\,dt$$

$$\ln N - ln(K-N) = rt + C$$

$$ln\left(\frac{N}{K-N}\right) = rt + C$$

$$\frac{N}{K-N} = e^{rt+C}$$

$$N = e^{rt+C}(K-N)$$

$$N = Ke^{rt+C} - Ne^{rt+C}$$

$$N + Ne^{rt+C} = Ke^{rt+C}$$

$$N(1 + e^{rt+C}) = Ke^{rt+C}$$

$$N = \frac{Ke^{rt+C}}{1+e^{rt+C}} \qquad (9)$$

Dari persamaan (9) jika diberikan nilai awal $t = 0$ dan $N(0) = N_0$ kemudian disubstitusikan ke persamaan (9) maka diperoleh nilai $C = ln\left(\frac{N_0}{K-N_0}\right)$. Nilai C tersebut disubstitusikan kembali ke persamaan (9), sehingga dari model logistik tersebut diperoleh solusi khusus seperti berikut,

$$N = \frac{Ke^{rt+ln\left(\frac{N_0}{K-N_0}\right)}}{1+e^{rt+ln\left(\frac{N_0}{K-N_0}\right)}}$$

$$N = \frac{Ke^{rt}\left(\frac{N_0}{K-N_0}\right)}{1+e^{rt}\left(\frac{N_0}{K-N_0}\right)}$$

$$N = \frac{\frac{Ke^{rt}N_0}{K-N_0}}{\frac{K-N_0+e^{rt}N_0}{K-N_0}}$$

$$N = \frac{Ke^{rt}N_0}{K-N_0+e^{rt}N_0}$$

$$N = \frac{KN_0}{(K-N_0+e^{rt}N_0)e^{-rt}}$$

$$N = \frac{KN_0}{(Ke^{-rt}-N_0e^{-rt}+N_0)}$$

$$N = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0}e^{-rt}-e^{-rt}+1\right)}$$

Sehingga diperoleh persamaan solusi khusus dari model logistik sebagai berikut:

$$N = \frac{K}{e^{-rt}\left(\frac{K}{N_0}-1\right)+1} \qquad (10)$$

Jika persamaan (10) dilimitkan $t \to \infty$, didapat (untuk $k > 0$):

$$N(t)_{Max} = \lim_{t\to\infty} N(t) = \frac{a}{b} = K$$

Laju pertumbuhan dan daya dukung lingkungan (*carrying capacity*) dapat diperkirakan dengan rentang waktu pengambilan data yang dinginkan. Dalam penelitian ini, perkiraan laju pertumbuhan dan daya dukung lingkungan (*carrying capacity*) berdasarkan interval waktu yaitu menggunakan data tiga tahun pertama. Jika N_0 adalah populasi pada saat $t = 0$, maka N_1 pada saat $t = 1$ dan N_2 pada saat $t = 2$, maka dari persamaan (10) dapat diperoleh:

$$N = \frac{\frac{a}{b}}{e^{-rt}\left(\frac{\frac{a}{b}}{N_0}-1\right)+1} \qquad (11)$$

$$N = \frac{abN_0}{b(bN_0+ae^{-rt}-bN_0e^{-rt})}$$

$$\frac{1}{N} = \frac{bN_0+ae^{-rt}-bN_0e^{-rt}}{aN_0}$$

$$\frac{1}{N} = \frac{b}{a} + \frac{e^{-rt}}{N_0} - \frac{bN_0e^{-rt}}{aN_0}$$

$$\frac{1}{N} = \frac{b}{a}(1-e^{-rt}) + \frac{e^{-rt}}{N_0}$$

$$\frac{b}{a}(1-e^{-rt}) = \frac{1}{N} - \frac{e^{-rt}}{N_0} \qquad (12)$$

Dari persamaan (12) pada saat $t = 1$ dan $t = 2$ maka diperoleh

$$N_1 = \frac{b}{a}(1-e^{-r}) = \frac{1}{N_1} - \frac{e^{-r}}{N_0} \qquad (13)$$

$$N_2 = \frac{b}{a}(1-e^{-2r}) = \frac{1}{N_2} - \frac{e^{-2r}}{N_0} \qquad (14)$$

Pada persamaan (13) dan (14) dilakukan pembagian, maka diperoleh

$$\frac{\frac{b}{a}(1-e^{-2r})=\frac{1}{N_2}-\frac{e^{-2r}}{N_0}}{\frac{b}{a}(1-e^{-r})=\frac{1}{N_1}-\frac{e^{-r}}{N_0}}$$

$$1 + e^{-r} = \frac{\frac{1}{N_2}-\frac{e^{-2r}}{N_0}}{\frac{1}{N_1}-\frac{e^{-r}}{N_0}}$$

$$e^{-r} = \left(\frac{N_0N_1-N_1N_2e^{-2r}}{N_0N_2-N_1N_2e^{-r}}\right) - \left(\frac{N_0N_2-N_1N_2e^{-r}}{N_0N_2-N_1N_2e^{-r}}\right)$$

$$e^{-r} = \frac{N_0(N_2-N_1)}{N_2(N_1-N_0)} \qquad (15)$$

Persamaan (15) disubstitusikan ke persamaan (13) maka:

$$\frac{b}{a}\left(1 - \frac{N_0(N_2-N_1)}{N_2(N_1-N_0)}\right) = \frac{1}{N_1} - \frac{\frac{N_0(N_2-N_1)}{N_2(N_1-N_0)}}{N_0}$$

$$\frac{b}{a}\left(\frac{N_2(N_1-N_0)}{N_2(N_1-N_0)}-\frac{N_0(N_2-N_1)}{N_2(N_1-N_0)}\right)=\frac{N_2(N_1-N_0)-(N_2-N_1)}{N_1N_2(N_1-N_0)}$$

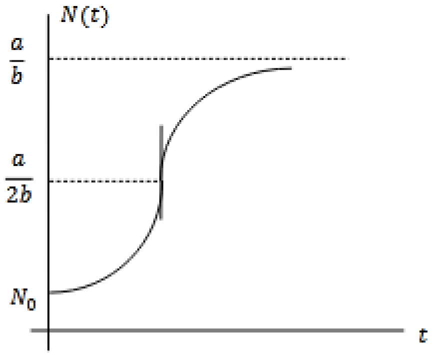
$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{N_2(N_1-N_0)-N_0(N_2-N_1)}{N_2(N_1-N_0)}}{\frac{N_2(N_1-N_0)-(N_2-N_1)}{N_1N_2(N_1-N_0)}}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{N_1(2N_0N_2-N_2N_1-N_0N_1)}{N_0N_2-{N_1}^2}$$

Sehingga persamaan daya dukung lingkungan (*carrying capacity*) dapat ditulis menjadi:

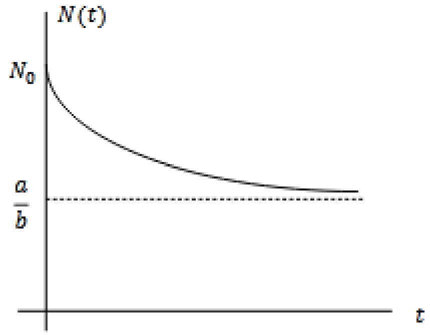
$$K=\frac{N_1(2N_0N_2-N_2N_1-N_0N_1)}{N_0N_2-{N_1}^2} \quad (16)$$

Menurut model pertumbuhan logistik, pertumbuhan populasi akan berjalan cepat ketika daya dukung lingkungan berada di atas ukuran suatu populasi. Akan tetapi pertumbuhan populasi akan menjadi lambat ketika N mendekati $\frac{a}{b}$. Untuk $a>0$ berlaku $\lim_{t\to\infty} N=\frac{a}{b}$, sehingga grafik dari persamaan (11) dapat disimpulkan mempunyai asimtot mendatar $N(t)=\frac{a}{b}$. Grafik solusi dapat dilihat sebagai berikut:



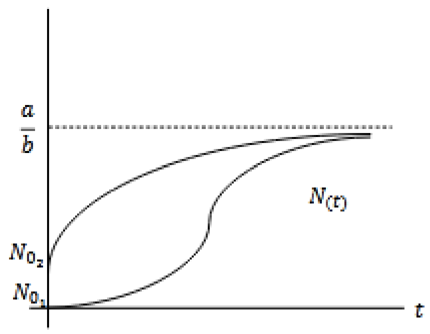
Gambar 1. Grafik pertumbuhan logistik naik

Terlihat bahwa kurva logistik diatas berbentuk huruf "S" yang mempunyai titik infleksi ketika $N=\frac{a}{2b}$. Untuk $\frac{a}{b}<N_0$, $a>0$ grafik solusinya dapat dilihat sebagai berikut:



Gambar 2. Grafik pertumbuhan logistik menurun

Ketika $N_0=0$ maka pertumbuhan penduduk akan terus bergerak mendekati daya dukung lingkungan pada titik yang tidak stabil sehingga seiring populasi N_0 meningkat, laju pertumbuhan relatifnya menurun.



Gambar 3 Solusi titik kritis tidak stabil

Penyelesaian Model Pertumbuhan Logistik

Untuk mengestimasi jumlah populasi penduduk di Kabupaten Banyumas dengan model logistik, maka untuk waktu (t) yang diukur dalam tahun diasumsikan terlebih dahulu dan selanjutnya dimisalkan $t=0$ pada tahun 2015 maka syarat awal adalah $N(0)=1.635.909$. Selanjutnya adalah menentukan nilai daya dukung lingkungan (*carrying capacity*) yaitu

$$K=\frac{N_1(2N_0N_2-N_2N_1-N_0N_1)}{N_0N_2-{N_1}^2}$$

Dari Tabel 1 diperoleh $t=0,1,2$ yaitu tahun 2015, 2016, 2017 dengan nilai N_0,N_1,N_2 dengan masing-masing nilai adalah $N_0=1.635.909,$, $N_1=1.650.625$, $N_2=1.665.025$. Untuk mencari nilai *carrying capacity*, maka nilai N_0,N_1,N_2 disubstitusikan kepersamaan diatas sehingga diperoleh nilai $K=2.127.490,49$.

Nilai K dan N_0 disubstitusikan ke persamaan (10) solusi model logistik sehingga diperoleh:

$$N=\frac{K}{e^{-rt}\left(\frac{K}{N_0}-1\right)+1}$$

$$N=\frac{2.127.490,49}{e^{-rt}\left(\frac{2.127.490,49}{1.635.909}-1\right)+1}$$

$$N=\frac{2.127.490,49}{(0,30049)e^{-rt}+1} \quad (18)$$

Selanjutnya akan dicari model logistik yang dapat mewakili laju pertumbuhan penduduk di Kabupaten Banyumas untuk $t=1$ pada tahun 2016 maka $N(1)=1.650.625$, maka dari persamaan (18) dapat diperoleh:

$$1.650.625=\frac{2.127.490,49}{e^{-r(1)}(0,30049)+1}$$

$$e^{-r}(0,30049)+1=\frac{2.127.490,49}{1.650.625}$$

$$e^{-r}(0,30049)=\frac{2.127.490,49-1.650.625}{1.650.625}$$

$$-r=ln(0,96143)$$

$$r=0.03933$$

Nilai r yang diperoleh disubstitusikan ke persamaan (18) maka diperoleh:

$$N=\frac{2.127.490,49}{(0,30049)e^{-(0.03933)t}+1} \quad \text{(Model I)}$$

Dari persamaan (18) untuk $t=2$ pada tahun 2017 maka $N(2)=1.665.025$ dapat diperoleh:

$$1.665.025=\frac{2.127.490,49}{e^{-r(2)}(0,30049)+1}$$

$$e^{-2r}(0,30049)+1=\frac{2.127.490,49}{1.665.025}$$

$$e^{-2r}(0,30049)=\frac{2.127.490,49-1.665.025}{1.665.025}$$

$$-r=\frac{ln(0,92433)}{2}$$

$$r=0,03934$$

Nilai r yang diperoleh disubstitusikan kembali ke persamaan (18) maka diperoleh:

$$N = \frac{2.127.490,49}{(0,30049)e^{-(0,03934)t}+1} \quad \text{(Model II)}$$

Dari persamaan (18) untuk $t = 3$ pada tahun 2018 maka $N(3) = 1.679.124$ dapat diperoleh:

$$1.679.124 = \frac{2.127.490,49}{e^{-r(3)}(0,30049)+1}$$

$$e^{-3r}(0,30049) + 1 = \frac{2.127.490,49}{1.679.124}$$

$$e^{-3r}(0,30049) = \frac{2.127.490,49-1.679.124}{1.679.124}$$

$$-r = \frac{ln(0,88863)}{3}$$

$$r = 0,03936$$

Nilai r yang diperoleh disubstitusikan kembali ke persamaan (18) maka diperoleh:

$$N = \frac{2.127.490,49}{(0,30049)e^{-(0,03936)t}+1} \quad \text{(Model III)}$$

Dari persamaan (18) untuk $t = 4$ pada tahun 2019 maka $N(4) = 1.840.152$ dapat diperoleh:

$$1.840.152 = \frac{2.127.490,49}{e^{-r(4)}(0,30049)+1}$$

$$e^{-4r}(0,30049) + 1 = \frac{2.127.490,49}{1.840.152}$$

$$e^{-4r}(0,30049) = \frac{2.127.490,49-1.840.152}{1.840.152}$$

$$-r = \frac{ln(0,51965)}{4}$$

$$r = 0,16365$$

Nilai r yang diperoleh disubstitusikan kembali ke persamaan (18) maka diperoleh:

$$N = \frac{2.127.490,49}{(0,30049)e^{-(0,16365)t}+1} \quad \text{(Model IV)}$$

Dari persamaan (18) untuk $t = 5$ pada tahun 2020 maka $N(5) = 1.776.918$ dapat diperoleh:

$$1.776.918 = \frac{2.127.490,49}{e^{-r(5)}(0,30049)+1}$$

$$e^{-5r}(0,30049) + 1 = \frac{2.127.490,49}{1.776.918}$$

$$e^{-5r}(0,30049) = \frac{2.127.490,49-1.776.918}{1.776.918}$$

$$-r = \frac{ln(0,65657)}{5}$$

$$r = 0,08415$$

Nilai r yang diperoleh disubstitusikan kembali ke persamaan (18) maka diperoleh:

$$N = \frac{2.127.490,49}{(0,30049)e^{-(0,08415)t}+1} \quad \text{(Model V)}$$

Dari persamaan (18) untuk $t = 6$ pada tahun 2021 maka $N(6) = 1.789.630$ dapat diperoleh:

$$1.789.630 = \frac{2.127.490,49}{e^{-r(6)}(0,30049)+1}$$

$$e^{-6r}(0,30049) + 1 = \frac{2.127.490,49}{1.789.630}$$

$$e^{-6r}(0,30049) = \frac{2.127.490,49-1.789.630}{1.789.630}$$

$$-r = \frac{ln(0,62827)}{6}$$

$$r = 0,07746$$

Nilai r yang diperoleh disubstitusikan kembali ke persamaan (18) maka diperoleh:

$$N = \frac{2.127.490,49}{(0,30049)e^{-(0,07746)t}+1} \quad \text{(Model VI)}$$

Dari hasil perhitungan diatas diperoleh hasil model logistik sebagai berikut:

1. Model Logistik I bentuk persamaannya $N = \frac{2.127.490,49}{(0,30049)e^{-(0.03933)t}+1}$ dengan laju pertumbuhan relatif per tahunnya sekitar 3,93%.
2. Model Logistik II bentuk persamaannya $N = \frac{2.127.490,49}{(0,30049)e^{-(0,03934)t}+1}$ dengan laju pertumbuhan relatif per tahunnya sekitar 3,93%.
3. Model Logistik III bentuk persamaannya $N = \frac{2.127.490,49}{(0,30049)e^{-(0,03936)t}+1}$ dengan laju pertumbuhan relatif per tahunnya sekitar 3,93%.
4. Model Logistik IV bentuk persamaannya $N = \frac{2.127.490,49}{(0,30049)e^{-(0,16365)t}+1}$ dengan laju pertumbuhan relatif per tahunnya sekitar 16,36%.
5. Model Logistik V bentuk persamaannya $N = \frac{2.127.490,49}{(0,30049)e^{-(0,08415)t}+1}$ dengan laju pertumbuhan relatif per tahunnya sekitar 8,41%.
6. Model Logistik VI bentuk persamaannya $N = \frac{2.127.490,49}{(0,30049)e^{-(0,07746)t}+1}$ dengan laju pertumbuhan relatif per tahunnya sekitar 7,75%.

Tabel 2 berikut ini memuat hasil jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas tahun 2015-2021 berdasarkan dari enam model logistik diatas dengan perhitungan menggunakan *Microsoft Excel* diantaranya sebagai berikut :

Tabel 2 Perbandingan antara hasil sensus dan hasil model pada jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas

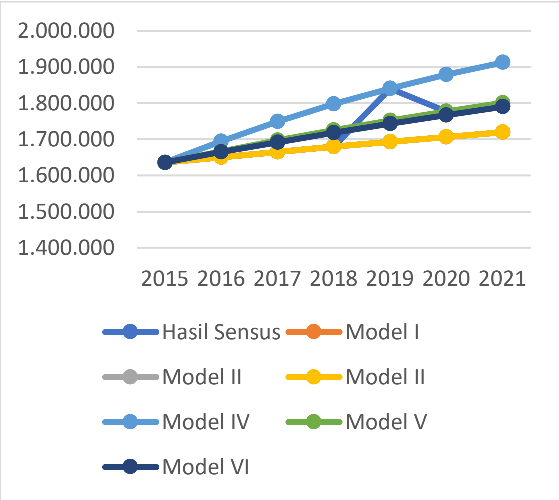
Tahun	Hasil Sensus	Model					
		I	II	III	IV	V	VI
2015	1.635.909	1.635.915	1.635.915	1.635.915	1.635.915	1.635.915	1.635.915
2016	1.650.625	1.650.624	1.650.627	1.650.635	1.695.039	1.667.001	1.664.582
2017	1.665.025	1.665.017	1.665.024	1.665.039	1.748.699	1.696.639	1.692.023
2018	1.679.124	1.679.094	1.679.104	1.679.126	1.796.999	1.724.830	1.718.237
2019	1.840.152	1.692.854	1.692.868	1.692.895	1.840.152	1.751.586	1.743.232
2020	1.776.918	1.706.298	1.706.315	1.706.348	1.878.451	1.776.925	1.767.020
2021	1.789.630	1.719.426	1.719.446	1.719.485	1.912.242	1.800.874	1.789.621

Tabel 3 Perhitungan MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*) untuk setiap model logistik

Tahun	Hasil Sensus	Model					
		I	II	III	IV	V	VI
2015	1.635.909	0,00034	0,00034	0,00034	0,00034	0,00034	0,00034
2016	1.650.625	0,00009	0,00013	0,00058	2,69074	0,99209	0,84558
2017	1.665.025	0,00049	0,00006	0,00081	5,02538	1,89871	1,62149

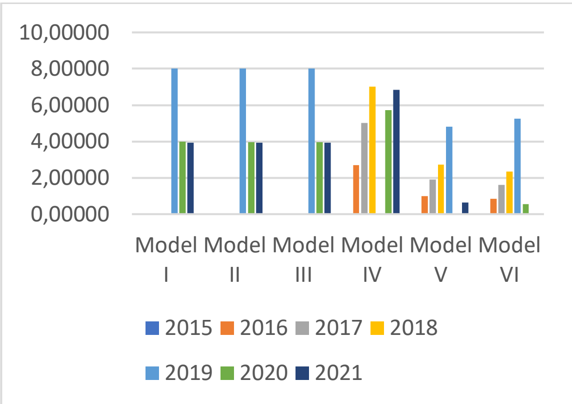
2018	1.679.124	0,00181	0,00117	0,00009	7,02000	2,72203	2,32940
2019	1.840.152	8,00467	8,00392	8,00242	0,00002	4,81299	5,26695
2020	1.776.918	3,97431	3,97336	3,97146	5,71399	0,00037	0,55701
2021	1.789.630	3,92282	3,92171	3,91950	6,85127	0,62829	0,00048
$\frac{\sum galat}{n}$		2,27208	2,27153	2,27074	3,90025	1,57926	1,51732

Selanjutnya menghitung MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*) yang dilakukan oleh model untuk memprediksi jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas diantaranya sebagai berikutBerdasarkan data pada Tabel 2 dapat dibentuk kurva seperti yang ditampilkan pada Gambar 1 berikut:



Gambar 4. Grafik jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas berdasarkan hasil sensus dan hasil model logistik

Selanjutnya berdasarkan data pada Tabel 3 dapat dibentuk kurva seperti yang di tampikan pada Gambar 2 berikut:



Gambar 5. Grafik perhitungan *error* untuk setiap model logistik

Pada Tabel 3 dan Gambar 2 terlihat bahwa perbandingan antara hasil sensus dengan hasil model diatas terdapat *error* terkecil pada model logistik VI. Jadi, model logistik VI dapat dikatakan lebih akurat dari model logistik lainnya. Dengan kata lain, model logistik VI dapat digunakan untuk memprediksi jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas untuk beberapa tahun yang akan datang.

Dengan menggunakan model logistik VI didapat nilai MAPE pada Tabel 3 sebesar 1,52%. Hasil nilai MAPE tersebut lebih kecil dari 10%, maka menurut (Zainun et al., 2011) model pertumbuhan logistik tersebut mampu memproyeksi jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas dengan sangat baik hingga tahun 2030 dan MAPE dikatakan baik jika bernilai 10-20%.

Prediksi Jumlah Penduduk di Kabupaten Banyumas Tahun 2022-2030

Karena model logistik VI yang akan digunakan untuk memprediksi jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas pada tahun 2022-2030, maka persamaan model yang digunakan adalah

$$N = \frac{2.127.490,49}{(0,30049)e^{-(0,07746)t} + 1}$$

Laju pertumbuhan relatif dari model diatas adalah 7,75% pertahun. Selanjutnya dari model logistik VI akan terlebih dahulu memprediksi jumlah penduduk pada tahun 2022 dengan mengambil $t = 2022 - 2015 = 7$ maka diperoleh:

$$N = \frac{2.127.490,49}{(0,30049)e^{-(0,07746)(7)}+1}$$

$$N = \frac{2.127.490,49}{(0,30049)e^{-(0,54222)}+1}$$

$$N = \frac{2.127.490,49}{0,17472+1}$$

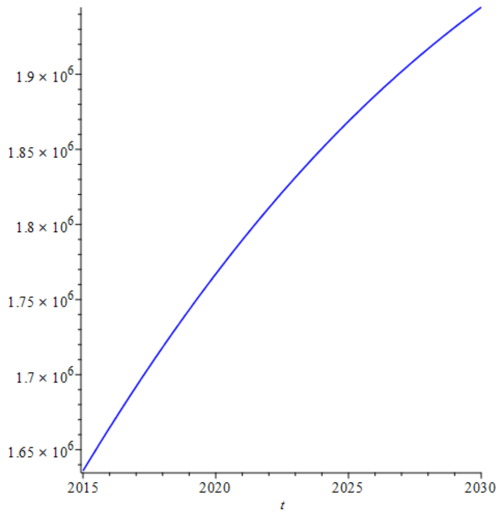
$$N = 1.811.059,14$$

Jadi, diperoleh hasil perhitungan jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas pada tahun 2022 dengan menggunakan model logistik yaitu 1.811.059 jiwa. Dengan cara yang sama dapat diperoleh prediksi jumlah penduduk tahun 2023-2030. Prediksi jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas tahun 2022-2030 seperti tercantum pada Tabel 4.

Tabel 4 Prediksi jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas tahun 2022-2030

Tahun	Hasil Prediksi
2022	1.811.059
2023	1.831.362
2024	1.850.561
2025	1.868.691
2026	1.885.790
2027	1.901.895
2028	1.917.046
2029	1.931.285
2030	1.944.653

Pada tabel 4 di atas merupakan hasil perhitungan dengan menggunakan model pertumbuhan logistik yang menunjukan bahwa jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas terus meningkat. Jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas tahun 2022-2030 juga dapat dihitung menggunakan *software Maple.* Plot data prediksi penduduk di Kabupaten Banyumas tahun 2022-2030 menggunakan *software Maple* ditunjukkan pada gambar 3 berikut ini:



Gambar 6. Plot jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas tahun 2015-2030

4. SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, maka dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Model pertumbuhan logistik untuk memprediksi jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas adalah
$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$
dan penyelesaian model yang lebih akurat untuk dijadikan model akhir untuk memprediksi jumlah penduduk di masa yang akan datang diperoleh model logistik VI dengan nilai daya dukung lingkungan (*carrying capacity*) yang membatasi penduduk di Kabupaten Banyumas adalah sebesar 2.127.490,49 jiwa.
2. Bentuk persamaan dari model logistik VI adalah
$$N = \frac{2.127.490{,}49}{(0{,}30049)e^{-(0{,}07746)t} + 1}$$
dengan laju pertumbuhan relatif pertahunnya penduduk di Kabupaten Banyumas dengan menggunakan model pertumbuhan logistik VI adalah sebesar 7,75%.
3. Berdasarkan model pertumbuhan logistik VI dapat diperoleh proyeksi jumlah penduduk di Kabupaten Banyumas pada tahun 2022 berjumlah 1.811.059 jiwa hingga tahun 2030 diperkirakan berjumlah 1.944.653 jiwa.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1]BPS Kabupaten Banyumas. (2021). *Kabupaten Banyumas Dalam Angka 2021* (BPS Kabupaten Banyumas (ed.)). BPS Kabupaten Banyumas.

[2]Dr. R. Ravichandran, D. R. R. (2011). A Study on Population Projection using the Logistic Curve method in Time series analysis with reference to India. *Indian Journal of Applied Research*, *3*(5), 601–603. https://doi.org/10.15373/2249555x/may2013/195

[3]Hala, K., Prang, J., & Komalig, H. (2016). Proyeksi Pertumbuhan Mobil Pribadi Roda Empat (Plat Hitam) Kota Manado Menggunakan Persamaan Differensial Model Pertumbuhan Populasi Kontinu (Model Logistik). *D'CARTESIAN*, *5*(2), 80. https://doi.org/10.35799/dc.5.2.2016.14017

[4]Hathout, D. (2013). Modeling Population Growth: Exponential and Hyperbolic Modeling. In *Applied Mathematics* (Vol. 04, Issue 02, pp. 299–304). https://doi.org/10.4236/am.2013.42045

[5]Henson, S. M., Brauer, F., & Castillo-Chavez, C. (2003). Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. In *The American Mathematical Monthly* (Vol. 110, Issue 3). https://doi.org/10.2307/3647954

[6]Iswanto, R. J. (2012). *Pemodelan Matematika : Aplikasi dan Terapannya*. Graha Ilmu.

[7]Minarul Haque, M., Ahmed, F., Anam, S., & Rashed Kabir, M. (2012). Future Population Projection of Bangladesh by Growth Rate Modeling Using Logistic Population Model. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, *1*(2), 2279–0888. www.researchmathsci.org

[8]Nurkholipah, N. S., Anggriani, N., & Supriatna, A. K. (2017). Perbandingan Proyeksi Penduduk Jawa Barat Menggunakan Malthus dan Verhust dengan Variasi Internal Pengambilan Sampel. *Jurnal DIALEKTIKA*, *1*(1), 195-202. https://jurnal.untan.ac.id/index.php/jbmstr/article/view/5189

[9]S Kulkarni, S., R Kulkarni, S., & J Patil, S. (2014). Analysis of Population Growth of India and Estimation for Future. *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology*, *03*(09), 15843–15850. https://doi.org/10.15680/ijirset.2014.0309008

[10]Stewart, J. (2007). *Calculus* (6th ed.). Brooks Cole.

[11]Sugiyono. (2013). *Metode Penelitian Kuantitatif, Kualitatif, dan R&D.* Alfabeta.

[12]Tsoularis, A., & Wallace, J. (2002). Analysis of logistic growth models. *Mathematical Biosciences*, *179*(1), 21–55. https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00096-2

[13]Wali, A., Ntubabare, D., & Mboniragira, V. (2011). Mathematical modeling of Rwanda's population growth. *Applied Mathematical Sciences*, *5*(53–56), 2617–2628.