Date of publication MMM-22, yyyy, date of current version MMM-dd, yyyy.
Perwira Journal of Science & Engineering, 3(2) 2023, 18-24
https://ejournal.unperba.ac.id/index.php/pjse

Online ISSN 2775-8486
DOI 10.54199/pjse.XXX.XXX

Solusi Persamaan Diophantine Non-linier Eksponensial $11^q + 13^r + 31^s + 37^t = u^2 - 1$ Beserta Arah Penelitian Berikutnya.

Agus Sugandha [1]
[1]Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman
[1)] email : : agus.sugandha@unsoed.ac.id

ABSTRAK:. Penelitian ini membahas pembuktian solusi persamaan Diophantine Non-Linear eksponensial $11^q + 13^r + 31^s + 37^t = u^2 - 1$ dengan q,r,s,t bulat non negative, dan u bulat positif. Metode untuk menyelesaikan persamaan Diophantine non-linear $11^q + 13^r + 31^s + 37^t = u^2 - 1$ dengan menggunakan teori kongruensi beserta sifat-sifatnya. Berdasarkan hasil penelitian menunjukkan bahwa persamaan Diophantine non-linear eksponensial mempunyai solusi (1,0,1,1,9) dan (3,2,3,177)

ABSTRACT: This study discusses proving the solution of the non-linear exponential Diophantine equation with non-negative integer q, r, s, t and positive integer u. Methods for solving non-linear Diophantine equation using congruence theory and its properties. Based on the results of study, it shows that the exponential non-linear Diophantine equation has solustions (1,0,1,1,9) and (3,2,2,177)
Keywords : solusi,teori kongruensi, publikasi, persamaan Diophantine Non-Linear Eksponensial.

Keywords: non-linear Diophantine equation, theory congruence, Catalan conjecture, Pell's equation

PENDAHULUAN

Persamaan Diophantine pertama kali dikemukakan oleh seorang matematikawan Yunani yang bernama Diophantus. Persamaan Diophantine adalah suatu persamaan yang mempunyai solusi bilangan bulat, dan solusi tersebut dapat berupa solusi tunggal, banyak solusi, atau tidak ada solusi (Siburian, dkk., 2015: 417). Persamaan Diophantine dibagi menjadi dua, yaitu persamaan Diophantine linier dan persamaan Diophantine non-linier. Bentuk persamaan Diophantine linier adalah $ax + by = c$, dengan a dan b adalah bilangan bulat bukan nol serta c adalah bilangan bulat. Sedangkan bentuk persamaan Diophantine non-linier dibagi menjadi dua, yaitu persamaan Diophantine non-linier polinomial dan persamaan Diophantine non-linier eksponensial. Persamaan eksponensial pada persamaan Diophantine non-linier dapat dinyatakan dalam bentuk $a^x + b^y = c^2$, dengan a, b, dan c adalah bilangan bulat serta a dan b keduanya bukan nol. Sedangkan bentuk persamaan Diophantine non-linier polinomial adalah $x^n + y^n = z^n$ dengan $n > 1$.

Ada beberapa metode untuk menyelesaikan persamaan Diophantine non-linier, diantaranya adalah konjektur Catalan, teori kekongruenan, dan fraksi kontinu. Dari ketiga metode tersebut, yang sering digunakan untuk mencari solusi pada persamaan Diophantine non-linier khususnya persamaan Diophantine non-linier eksponensial adalah Konjektur Catalan dan teori kekongruenan.

Penelitian mengenai persamaan Diophantine non-linier khususnya persamaan Diophantine non-linier eksponensial sudah banyak dilakukan, diantaranya Banyat Sroysang, Chantana Simtrakankul, dan Julius Fergy T. Rabago. Dari beberapa penelitian mengenai persamaan Diophantine non-linier eksponensial tersebut tidak lain adalah untuk mencari solusi dibilangan bulat. Berikut ini adalah beberapa contoh mengenai persamaan Diophantine non-liner eksponensial diantaranya adalah Sroysang (2012b: 609) yang meneliti tentang persamaan Diophantine non-linier eksponensial $31^x + 32^y = z^2$, dengan x, y, dan z adalah bilangan bulat non-negatif dan hasilnya tidak memiliki solusi. Pada tahun yang sama, Sroysang (2012a: 605) melakukan penelitian mengenai persamaan Diophantine non-linier eksponensial $3^x + 5^y = z^2$, dengan x, y, dan z adalah bilangan bulat non-negatif dan hasilnya adalah solusi tunggal, yaitu $(x, y, z) = (1, 0, 2)$. Sementara itu, Rabago (2016: 177) meneliti persamaan Diophantine non-linier

eksponensial $2^x + 17^y = z^2$, dengan *x*, *y*, dan *z* adalah bilangan bulat non-negatif dan hasilnya ada lima solusi, yaitu $(x, y, z) = (3,1,5)$, $(5,1,7)$, $(6,1,9)$, $(7,3,71)$, dan $(9,1,23)$. Namun sebelumnya, pada tahun 2014 Bacani and Rabago (2014: 64) meneliti persamaan Diophantine non-linier eksponensial $3^x + 5^y + 7^z = w^2$, dengan x, y, z, w adalah bilangan bulat non-negatif dan w adalah bilangan bulat positif, dan hasilnya ada 3 solusi yaitu $(x, y, z, w) = (0,0,1,3), (1,1,0,3), (3,1,2,9)$.
Berdasarkan penelitian yang sudah dilakukan oleh Bacani and Rabago (2014: 64) di atas, penulis tertarik untuk melakukan penelitian mengenai persamaan Diophantine non-linier eksponensial dengan penambahan jumlah variabel. Persamaan yang akan diteliti adalah persamaan Diophantine non-linier eksponensial $11^q + 13^r + 31^s + 37^t = u^2 - 1$ dengan q, r, s, t adalah bilangan bulat non-negatif dan u adalah bilangan bulat positif.

METODLOGI PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah dengan menggunakan study literature melalui telaah jurnal yang terkait. Kemudian berdasarkan jurnal yang diperoleh kemudian dianalisa dan dikembangkan. Sementara itu metode pembuktian solusi persamaan Diophantine non-linier eksponensial $11^q + 13^r + 31^s + 37^t = u^2 - 1$ adalah metode teori kekongruenan. Namun untuk pembuktiannya akan dibantu dengan menggunakan program MATLAB

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 4.2

(1,0,1,1,9) dan (3,2,3,1,177) adalah solusi (*q*,*r*,*s*,*t*,*u*) dari persamaan Diophantine non-linier eksponensial $11^q + 13^r + 31^s + 37^t = u^2 - 1$ dengan q, r, s, t adalah bilangan bulat non-negatif dan u adalah bilangan bulat positif.

Bukti.
Misal adalah bilangan bulat non-negatif dan u adalah bilangan bulat positif. Akan ditunjukan $11^q + 13^r + 31^s + 37^t = u^2 - 1$ mempunyai solusi (1,0,1,1,9) dan (3,2,3,1,177).

Langkah pertama dalam pembuktian persamaan Diophantine non-linier eksponensial $11^q + 13^r + 31^s + 37^t = u^2 - 1$ adalah mencari setiap nilai q, r, s, t bernilai ganjil atau genap dengan menggunakan teori kekongruenan. Caranya adalah masing-masing ruas pada persamaan $11^q + 13^r + 31^s + 37^t = u^2 - 1$ dimodulokan 4, sehingga diperoleh

- $11^q \equiv 1 \pmod 4$, untuk $q \in \mathbb{Z}_0$ genap;
  $11^q \equiv 3 \pmod 4$, untuk $q \in \mathbb{Z}_0$ ganjil;
- $13^r \equiv 1 \pmod 4$, untuk $r \in \mathbb{Z}_0$;
- $31^s \equiv 1 \pmod 4$, untuk $s \in \mathbb{Z}_0$ genap;
  $31^s \equiv 3 \pmod 4$, untuk $s \in \mathbb{Z}_0$ ganjil;
- $37^t \equiv 1 \pmod 4$, untuk $t \in \mathbb{Z}_0$.

Sementara itu, $u^2 - 1 \equiv 0{,}3 \pmod 4$.
Selanjutnya, berdasarkan hasil modulo diatas maka diperoleh 4 kemungkinan sebagai berikut.

- $11^q + 13^r + 31^s + 37^t = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \equiv 0 \pmod 4$;
- $11^q + 13^r + 31^s + 37^t = 1 + 1 + 3 + 1 = 6 \equiv 2 \pmod 4$;
- $11^q + 13^r + 31^s + 37^t = 3 + 1 + 1 + 1 = 6 \equiv 2 \pmod 4$;
- $11^q + 13^r + 31^s + 37^t = 3 + 1 + 3 + 1 = 8 \equiv 0 \pmod 4$.

Karena $u^2 - 1 \equiv 0{,}3 \pmod 4$, maka dari hasil keempat kemungkinan tersebut pilih untuk $11^q + 13^r + 31^s + 37^t = 3 + 1 + 3 + 1 = 8 \equiv 0 \pmod 4$. Sehingga diperoleh $q \in \mathbb{Z}_0$ ganjil, $s \in \mathbb{Z}_0$ ganjil, $r \in \mathbb{Z}_0$, dan $t \in \mathbb{Z}_0$. Misalkan untuk masing-masing q, r, s, t dapat dinyatakan sebagai $q = 2a + 1$, $s = 2c + 1$, $r = b$, dan $t = d$ dengan $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_0$ maka diperoleh persamaan berikut ini dengan $u = 2m + 1$ dengan $m \in \mathbb{Z}^+$.

$$11^{2a+1} + 13^b + 31^{2c+1} + 37^d = u^2 - 1. \tag{1}$$

Dengan mensubstitusi $u = 2m + 1$ ke persamaan di atas, maka diperoleh:

$$\frac{11^{2a+1} + 13^b + 31^{2c+1} + 37^d}{8} = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Berdasarkan persamaan (3) dan (4) di atas, akan dianalisis untuk masing-masing a, b, c, d kedalam 3 kasus, yaitu kasus $\min\{a, b, c, d\} = 0$, $\min\{a, b, c, d\} = 1$, $\min\{a, b, c, d\} > 1$.

1. Kasus $\min\{a, b, c, d\} = 0$.
   Untuk kasus ini, akan dianalisis untuk setiap kemungkinan a, b, c, d seperti pada Tabel 1 dibawah ini.

\

Tabel 1 Kemungkinan solusi untuk kasus $\min\{a, b, c, d\} = 0$

a	b	c	d	Keterangan
0	0	0	$\neq 0$	Ada solusi
0	0	$\neq 0$	0	Tidak ada solusi
0	$\neq 0$	0	0	Tidak ada solusi
$\neq 0$	0	0	0	Tidak ada solusi
0	0	$\neq 0$	$\neq 0$	Tidak ada solusi
$\neq 0$	$\neq 0$	0	0	Tidak ada solusi
$\neq 0$	0	$\neq 0$	0	Tidak ada solusi
$\neq 0$	0	0	$\neq 0$	Tidak ada solusi
0	$\neq 0$	$\neq 0$	0	Tidak ada solusi
0	$\neq 0$	0	$\neq 0$	Tidak ada solusi
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	0	Tidak ada solusi
$\neq 0$	$\neq 0$	0	$\neq 0$	Tidak ada solusi
$\neq 0$	0	$\neq 0$	$\neq 0$	Tidak ada solusi
0	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	Tidak ada solusi

Berdasarkan Tabel 1, setelah dilakukan analisis dengan menggunakan teori kekongruenan diperoleh bahwa kemungkinan solusi tersebut adalah ketika $a = 0, b = 0, c = 0$, dan $d \neq 0$. Untuk lebih jelasnya, dibawah ini akan di tunjukan sampel pembuktian untuk masing-masing kondisi a, b, c, d ada solusi dan a, b, c, d tidak ada solusi. Kemudian untuk pembuktian kondisi a, b, c, d lainnya hanya mengikuti cara sebelumnya.

- Berikut ini akan ditunjukan untuk kondisi a, b, c, d ada solusi. Misalkan diambil nilai $a = 0, b = 0, c = 0$, dan $d \neq 0$ dengan $d \geq 1$.
  Jika diambil nilai $d = 1$, maka dengan mensubstitusi $a = 0, b = 0, c = 0$, dan $d = 1$ ke dalam persamaan (2), maka diperoleh $\frac{m(m+1)}{2} = 10$, sehingga $m = 4$. Kemudian, karena diperoleh $m = 4$ maka untuk $u = 2m + 1$ diperoleh $u = 9$. Jadi dapat disimpulkan bahwa, untuk $a = 0, b = 0, c = 0, d = 1$ dan $m = 4$, diperoleh $q = 2(0) + 1 = 1$, $s = 2(0) + 1 = 1$, $r = 0$, dan $t = 1$. Oleh karena itu, $(q, r, s, t, u) = (1, 0, 1, 1, 9)$ adalah solusi dari persamaan $11^q + 13^r + 31^s + 37^t = u^2 - 1$.

Jika diambil nilai $d \geq 2$, maka berdasarkan persamaan $11^q + 13^r + 31^s + 37^t = u^2 - 1$ diperoleh $u^2 = 37^d + 44$. Jika dimisalkan $u = 2m + 1$ maka diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\left(m - \left(\frac{\sqrt{44} - 1}{2}\right)\right)\left(m + \left(\frac{\sqrt{44} + 1}{2}\right)\right) = 37^d$$

Karena nilai d pada persamaan diatas belum diketahui ganjil atau genap, maka selanjutnya untuk nilai d tersebut harus dianalisis untuk masing-masing d bernilai ganjil dan d bernilai genap.

Untuk nilai d bernilai ganjil. Jika dimisalkan $d = 2\alpha + 1$ dengan $\alpha \in \mathbb{Z}^+$, maka diperoleh persamaan sebagai berikut.

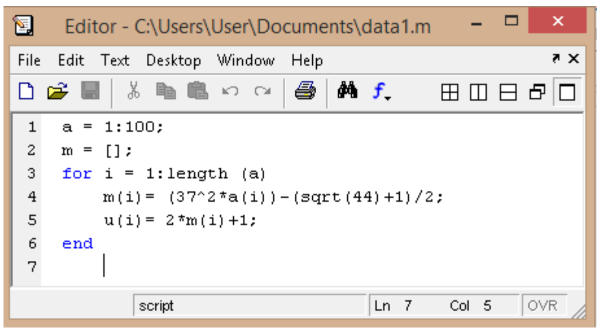
$$\left(m - \left(\frac{\sqrt{44} - 1}{2}\right)\right)\left(m + \left(\frac{\sqrt{44} + 1}{2}\right)\right) = 37^{2\alpha+1}$$

Berdasarkan persamaan tersebut diatas, maka diperoleh

$$\left(m - \left(\frac{\sqrt{44}-1}{2}\right)\right) = 37 \quad (3)$$

$$\left(m + \left(\frac{\sqrt{44}+1}{2}\right)\right) = 37^{2\alpha}. \quad (4)$$

Untuk persamaan (3) tidak mempunyai solusi, sedangkan untuk persamaan (4) harus dibentuk terlebih dahulu menjadi $m = 37^{2\alpha} - \left(\frac{\sqrt{44}+1}{2}\right)$. Untuk memastikan apakah persamaan $m = 37^{2\alpha} - \left(\frac{\sqrt{44}+1}{2}\right)$ mempunyai solusi maka akan dibantu dengan menggunakan program MATLAB. Berikut ini adalah tampilan mengenai program MATLAB.



Gambar 1 Tampilan program untuk persamaan (4)

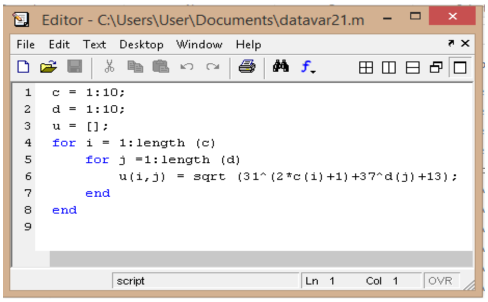
Berdasarkan program pada Gambar 1, maka dapat disimpulkan bahwa persamaan (4) tidak mempunyai solusi. Hal ini dapat dilihat pada Tabel 2 yang mana dapat disimpulkan bahwa karena untuk setiap nilai u bukan bilangan bulat positif, maka dapat disimpulkan bahwa untuk d bernilai ganjil tidak ada solusi. Berikut ini adalah Tabel 2 yang mana berisi mengenai sampel hasil dari program MATLAB seperti pada Gambar 1.

Untuk nilai d bernilai genap, cara pembuktiannya sama pada waktu pembuktian d bernilai ganjil. Untuk d bernilai genap, langkah pertama adalah memisalkan terlebih dahulu nilai d menjadi $d = 2\beta$ dengan $\beta \in \mathbb{Z}^+$. Dengan menggunakan langkah-langkah pembuktian pada saat d bernilai ganjil maka dapat disimpulkan bahwa untuk kasus d bernilai genap tidak ada solusi. Jadi dapat disimpulkan bahwa satu-satunya solusi untuk persamaan (1) dan (2) adalah pada saat $a = 0, b = 0, c = 0$, dan $d \neq 0$ dengan $d = 1$.

- Berikut ini akan ditunjukan untuk kondisi a, b, c, d tidak ada solusi. Misalkan diambil nilai $a = 0, b = 0,$ $c \neq 0, d \neq 0$ dengan $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_0$ dan $c \geq 1,\ d \geq 1$. Dengan mensubstitusi $a = 0, b = 0, c \neq 0, d \neq 0$ ke persamaan $11^{2a+1} + 13^b + 31^{2c+1} + 37^d = u^2 - 1$ maka diperoleh

$$u = \sqrt{31^{2c+1} + 37^d + 13}. \tag{5}$$

Untuk memastikan apakah nilai u pada persamaan (5) adalah bilangan bulat positif, maka akan di gunakan program MATLAB untuk memastikannya. Berikut ini adalah tampilan program yang mana akan ditampilkan pada Gambar 2 berikut.




```
c = 1:10;
d = 1:10;
u = [];
for i = 1:length (c)
    for j =1:length (d)
        u(i,j) = sqrt (31^(2*c(i)+1)+37^d(j)+13);
    end
end
```

Gambar 2 Tampilan program untuk persamaan (5)

Berdasarkan program pada Gambar 2, maka untuk setiap u pada persamaan (5) bukan bilangan bulat positif, maka dapat disimpulkan bahwa untuk persamaan (5) tidak mempunyai solusi.

2. Kasus $\min\{a, b, c, d\} = 1$.
   Untuk kasus ini, akan dianalisis untuk setiap kemungkinan a, b, c, d seperti pada Tabel 3.4 dibawah ini.

Tabel 3 Kemungkinan solusi untuk kasus $\min\{a, b, c, d\} = 1$

a	b	c	d	Keterangan
1	1	1	$\neq 1$	Tidak ada solusi
1	1	$\neq 1$	1	Tidak ada solusi
1	$\neq 1$	1	1	Ada solusi
$\neq 1$	1	1	1	Tidak ada solusi
1	1	$\neq 1$	$\neq 1$	Tidak ada solusi
$\neq 1$	$\neq 1$	1	1	Tidak ada solusi
$\neq 1$	1	$\neq 1$	1	Tidak ada solusi
$\neq 1$	1	1	$\neq 1$	Tidak ada solusi
1	$\neq 1$	$\neq 1$	1	Tidak ada solusi
1	$\neq 1$	1	$\neq 1$	Tidak ada solusi
$\neq 1$	$\neq 1$	$\neq 1$	1	Tidak ada solusi
$\neq 1$	$\neq 1$	1	$\neq 1$	Tidak ada solusi
$\neq 1$	1	$\neq 1$	$\neq 1$	Tidak ada solusi
1	$\neq 1$	$\neq 1$	$\neq 1$	Tidak ada solusi

Berdasarkan Tabel 3 akan dibuktian untuk kondisi $a = 1, b \neq 1, c = 1, d = 1$ dengan $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_0$ dan $b \geq 2$. Untuk pembuktian pada konsisi yang lain dapat dilakukan dengan menggunakan cara yang sama pada saat $a = 1, b \neq 1, c = 1, d = 1$.

- Berikut ini akan ditunjukan untuk kondisi $a = 1, b \neq 1, c = 1, d = 1$, dengan $b \geq 2$

  Jika diambil nilai $b = 2$, maka dengan mensubstitusi $a = 1,\ c = 1, d = 1$, dan $b = 2$ ke dalam persamaan (2) maka diperoleh $\frac{m(m+1)}{2} = 3.916$ maka diperoleh $m = 88$. Kemudian, karena diperoleh $m = 88$ maka untuk $u = 2m + 1$ diperoleh $u = 177$. Jadi dapat disimpulkan bahwa, untuk $a = 1, b = 2,\ c = 1, d = 1$ dan $m = 88$, maka diperoleh $q = 2(1) + 1 = 3,\ s = 2(1) + 1 = 3,\ r = 2,$ dan $t = 1$. Oleh karena itu,

$(q, r, s, t, u) = (3, 2, 3, 1, 177)$ adalah solusi dari persamaan $11^q + 13^r + 31^s + 37^t = u^2 - 1$.

Jika diambil nilai $b \geq 3$, maka berdasarkan persamaan $11^q + 13^r + 31^s + 37^t = u^2 - 1$ diperoleh $u^2 = 13^b + 31.160$. Jika dimisalkan $u = 2m + 1$ maka diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\left(m - \left(\frac{\sqrt{31.160} - 1}{2}\right)\right)\left(m + \left(\frac{\sqrt{31.160} + 1}{2}\right)\right) = 13^b.$$

Karena nilai b pada persamaan diatas belum diketahui ganjil atau genap, maka selanjutnya untuk nilai b tersebut harus dianalisis untuk masing-masing b bernilai ganjil dan b bernilai genap.

Untuk nilai b bernilai ganjil. Jika dimisalkan $b = 2\alpha + 1$ dengan $\alpha \in \mathbb{Z}^+$, maka diperoleh persamaan sebagai berikut.

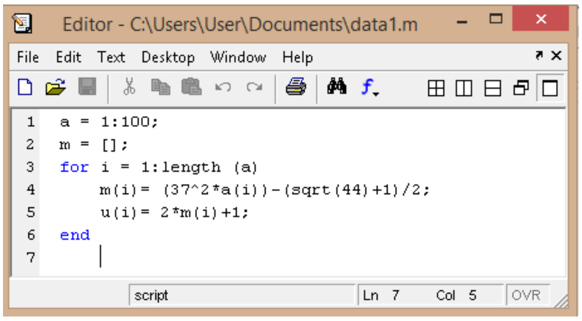
$$\left(m - \left(\frac{\sqrt{31.160} - 1}{2}\right)\right)\left(m + \left(\frac{\sqrt{31.160} + 1}{2}\right)\right) = 13^{2\alpha+1}$$

Berdasarkan persamaan tersebut diatas, maka diperoleh

$$\left(m - \left(\frac{\sqrt{31.160}-1}{2}\right)\right) = 13, \text{ dan} \tag{6}$$

$$\left(m + \frac{\sqrt{31.160}+1}{2}\right) = 13^{2\alpha}. \tag{7}$$

Untuk persamaan (6) tidak mempunyai solusi, sedangkan untuk persamaan (7) harus dibentuk terlebih dahulu menjadi $m = 37^{2\alpha} - \left(\frac{\sqrt{44}+1}{2}\right)$. Untuk memastikan apakah persamaan (7) mempunyai solusi, maka akan dibantu dengan menggunakan program MATLAB. Berikut ini adalah tampilan Gambar 3 mengenai program MATLAB.



Gambar 3 Tampilan program untuk persamaan (7)

Berdasarkan program pada Gambar 3., maka dapat disimpulkan bahwa persamaan (7) tidak mempunyai solusi.

Untuk nilai b bernilai genap, cara pembuktiannya sama pada waktu pembuktian b bernilai ganjil. Untuk b bernilai genap, langkah pertama adalah memisalkan terlebih dahulu nilai b menjadi $b = 2\beta$ dengan $\beta \in \mathbb{Z}^+$. Dengan menggunakan langkah-langkah pembuktian pada saat b bernilai ganjil maka dapat disimpulkan bahwa untuk kasus b bernilai genap tidak ada solusi. Jadi dapat disimpulkan bahwa satu-satunya solusi untuk persamaan (1) dan (2) adalah pada saat $a = 1, b \neq 1, c = 1, d = 1$ dengan $b \geq 2$.

3. Kasus $\min\{a, b, c, d\} > 1$.

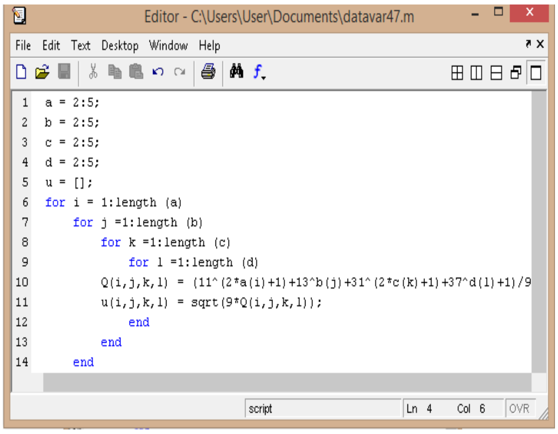
Pada kasus $\min\{a, b, c, d\} > 1$, untuk menyelesaikan pembuktian solusi pada persamaan (1) akan digunakan teori kekongruenan. Langkah pertama adalah masing-masing suku pada ruas kanan dan ruas kiri untuk persamaan (1) dimodulokan 9, sehingga diperoleh

$$(11^{2a+1} + 1) + 13^b + 31^{2c+1} + 37^d \equiv 0,3,6 \pmod 9). \tag{8}$$

Sementara itu, $u^2 \equiv 0,1,4,7 \pmod 9$.
Jika diperhatikan untuk hasil modulo pada ruas kanan yaitu $(11^{2a+1} + 1) + 13^b + 31^{2c+1} + 37^d \equiv 0 \pmod 9$ dan ruas kiri yaitu $u^2 \equiv 0 \pmod 9$ maka terdapat hasil yang sama yaitu nol. Sehingga dalam hal ini diperlukan suatu analisis untuk hasil modulo sama dengan nol untuk masing-masing ruas pada persamaan (8). Jika persamaan $(11^{2a+1} + 1) + 13^b + 31^{2c+1} + 37^d \equiv 0 \pmod 9$ dan $u^2 \equiv 0 \pmod 9$ dapat dinyatakan sebagai

$$u = \sqrt{9\left(\frac{(11^{2a+1}+1)+13^b+31^{2c+1}+37^d}{9}\right)} \tag{9}$$

Untuk memastikan apakah nilai u pada persamaan (9) merupaka bilangan bulat positif, maka diperlukan suatu program. Program yang digunakan dalam menyelesaikan permasalahan tersebut adalah program MATLAB. Berikut ini akan ditampilkan program untuk menyelesaikan persamaan (9) seperti pada Gambar 4 berikut.



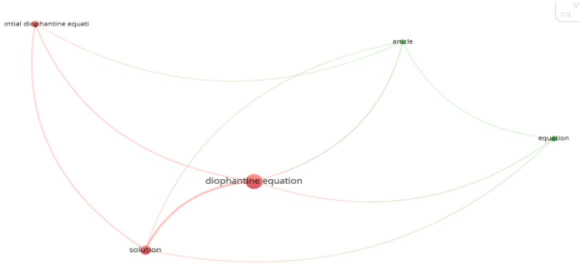

```
a = 2:5;
b = 2:5;
c = 2:5;
d = 2:5;
u = [];
for i = 1:length (a)
    for j =1:length (b)
        for k =1:length (c)
            for l =1:length (d)
        Q(i,j,k,l) = (11^(2*a(i)+1)+13^b(j)+31^(2*c(k)+1)+37^d(l)+1)/9
        u(i,j,k,l) = sqrt(9*Q(i,j,k,l));
            end
        end
    end
```

Gambar 4 Tampilan program untuk menyelesaikan persamaan (9)

Berdasarkan program pada Gambar 4, maka dapat disimpulkan bahwa persamaan (9) tidak mempunyai solusi. Hal ini dapat juga dilihat pada Tabel 3.5 dibawah ini yang mana dapat disimpulkan bahwa untuk setiap nilai u pada Tabel 3.5 bukan bilangan bulat positif. Sehingga dapat disimpulkan bahwa untuk persamaan $(11^{2a+1}+1)+13^b+31^{2c+1}+37^d \equiv 0 \pmod 9$ dan $u^2 \equiv 0 \pmod 9$ maka tidak ada solusi..

Jadi dapat disimpulakan bahwa, karena masing-masing ruas untuk hasil modulo yang sama dengan nol terbukti tidak ada solusi, maka untuk hasil modulo yang lainnya dapat dipastikan tidak ada solusi karena pada persamaan $(11^{2a+1}+1)+13^b+31^{2c+1}+37^d \equiv 3,6 \pmod 9$ sedangkan $u^2 \equiv 1,4,7 \pmod 9$.
Jadi, berdasarkan kasus $\min\{a,b,c,d\}=0$, $\min\{a,b,c,d\}=1$, dan $\min\{a,b,c,d\}>1$, maka dapat disimpulkan bahwa solusi (q,r,s,t,u) dari persamaan Diophantine non-linier eksponensial $11^q+13^r+31^s+37^t=u^2-1$ adalah $(q,r,s,t,u)=(1,0,1,1,9)$ dan $(3,2,3,1,177)$.

Arah penelitian berikutnya
Menggunakan aplikasi vos viewer, dengan menarik sekitar 500 jurnal pada tahun 2000-2023 dengan kata kunci "non-linear Diophantine" diperoleh gambar 5 sebagai berikut.



Gambar 5. Visualisasi vos viewer dengan penarikan 500 jurnal tahun 2000-2023

Beradsarkan gambar 5, dapat dilihat bahwa penelitian mengenai persamaan Diophantine selama ini adalah dengan mencari solusinya. Metode untuk mencari solusi bermacam macam, misalnya menggunakan sifat kekongruenan dll. Untuk solusi persamaan Diphantine eksponensial untuk melibatkan variable yang banyak masih terbuka lebar untuk diteliti. Demikian pula untuk mencari solusi persamaan diophantin polynomial sangat terbuka untuk diteliti. Yang masih menjadi pertanyaan besar adalah mencari eksisitensi solusi dari persamaan Diophantine non linear. Gambar t5 diatas tidak ada kalimat mengenai eksisitensi solusi yang terhubung dengan noktah persmaan Diophantine non linear eksponensial maupun polynomial. Tantangan terbesar mengenai solusi persamaan Diophantine non linear adalah mencari syarat eksistensi solusi tersebut.

KESIMPULAN

Berdasarkan uraian pada hasil dan pembahasan, dapat diperoleh kesimpulan bahwa dengan menggunakan teori kekongruenan, maka diperoleh solusi (*q*,*r*,*s*,*t*,*u*) pada persamaan Diophantine non-linier eksponensial $11^q+13^r+31^s+37^t=u^2-1$ adalah (1,0,1,1,9) dan (3,2,3,1,177).

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bacani dan Rabago. 2014. On The Diophantine Equation $3^x+5^y+7^z=w^2$. *Konurlap Jurnal Of Mathemaics*, (2), 2, 64-69.

[2] Rabago, J. F. T. (2016). On The Diophantine Equation $2^x+17^y=z^2$. *Indonesia Journal Mathematics Social*, (22), 2, 177-181.

[3] Rahmawati, R., Sugandha, A., Tripena, A., Prabowo, A. (2019). The Solution for the Non-Linier Diophantine Equation $(7^k-1)^x+(7^k)^y=z^2$ with k as the positive even whole number. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* (1179), 1, 1742-6596.

[4] Rosen, K. H. (1986). *Elementary Number Theory and Its Applications*. London: Addision-Wesley Publishing Company.

[5] Scott, R., dan R.Styer. (2004). On p^x-q^y = c and related three term exponential Diophantine

Equations with prime bases. *J. Number Theory*, (105), 2012-234.
[6] Siburian, B. M., Mashadi, dan Gemawati, S. (2015). Solusi Bilangan Bulat Suatu Persamaan Diophantine Melalui Bilangan Fibonacci dan Bilangan Lucas. *JOM FMPA*, (2), 417-425.
[7] Simtrakankul, C. (2014). On The Diophantine Equation $\left(2^k-1\right)^x+\left(2^k\right)^y=z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, (94), 1, 65-69.
[8] Sroysang, B. (2012a). On The Diophantine Equation $3^x+5^y=z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, (81), 4, 605-608.
[9] Sroysang, B. (2012b). On The Diophantine Equation $31^x+32^y=z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, (81), 4, 609-612.
[10[Sroysang, B. (2013a). On The Diophantine Equation $7^x+8^y=z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, (84), 1, 111-114.
[11] Sroysang, B. (2013b). On The Diophantine Equation $2^x+3^y=z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, (84), 2, 133-137.
[12] Sugandha, A., Tripena, A., Pabowo, A., dan Sukono, F. (2018). Nonlinear Diophantine Equation $11^x+13^y=z^2$. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 332, 012004, 1-4.
[13] Sukirman. (2006). *Pengantar Teori Bilangan*. Yogyakarta: Hanggar Kreator.