PERWIRA JOURNAL OF SCIENCE & ENGINEERING
Vol. 3 (2) 2023, 35-40

ISSN Online 2775-8486

Eksistensi solusi persamaan diophantine non linier polinomial $ax^2 - kxy + y^2 + lx = 0$

Agus Sugandha[1], Suwali[2]
[1]Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jenderal Soedirman, Purwokerto, Indonesia
[2]Jurusan Agribisnis, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Perwira Purbalingga, Purbalingga, Indonesia

Penulis Korespondensi : Agus Sugandha (e-mail: agus.sugandha@unsoed.ac.id)

ABSTRAK
Persamaan Diophantine merupakan persamaan polinomial yang memuat dua atau lebih variabel dengan solusinya berupa bilangan bulat. Persamaan Diophantine polinomial memiliki banyak cara yang dapat digunakan untuk menyelesaikannya, seperti menggunakan keterbagian, teori kekongruenan, fraksi kontinu, persamaan Pell, dan lainnya. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan syarat bilangan bulat k dan l sedemikian sehingga persamaan Diophantine non linier $ax^2 - kxy+y^2+lx=0$ dengan $2 \leq a \leq 15$ memiliki tak hingga solusi bilangan bulat positif (x,y). Pada penelitian ini dengan menggunakan teorema-teorema dalam fraksi kontinu dan persamaan Pell, diperoleh hasil bahwa terdapat pasangan-pasangan bilangan bulat k dan l sedemikian sehingga persamaan Diophantine non linier $ax^2 - kxy+y^2+lx=0$ untuk $2 \leq a \leq 15$ memiliki tak hingga solusi bilangan bulat positif (x,y) dengan $\gcd(x,y,l)=1$.

KATA KUNCI: Persamaan Diophantine non linier, keterbagian, teori kekongruenan, fraksi kontinu, persamaan Pell.

1. PENDAHULUAN

Teori bilangan adalah bagian dari matematika yang mencakup kajian tentang bilangan bulat dan sifat-sifatnya. Persamaan Diophantine yaitu persamaan polinomial dengan solusinya berupa bilangan bulat, Hidayatullah dkk. [3]. Menurut Burton. [1] persamaan Diophantine diambil dari nama matematikawan Diophantus yang tinggal di Alexandria sekitar tahun 250 Masehi. Persamaan tersebut baru dikenalkan sekitar tahun 270 Masehi oleh Uskup Laodikia dalam buku tentang perhitungan Mesir untuk menghormati temannya Diophantus. Persamaan Diophantine polinomial terdiri dari dua bentuk yaitu persamaan Diophantine linier polinomial dan persamaan Diophantine nonlinier polinomial. Persamaan Diophantine linier polinomial adalah persamaan polinomial berderajat satu sedangkan persamaan Diophantine nonlinier polinomial adalah persamaan polinomial berderajat lebih dari satu.

Persamaan Diophantine polinomial memiliki banyak cara yang dapat digunakan untuk menyelesaikannya, seperti menggunakan keterbagian, teori kekongruenan, fraksi kontinu, persamaan Pell, dan lainnya. Penelitian tentang penyelesaian persamaan Diophantine nonlinier yang berbentuk $x^2 - kxy+y^2+x=0$ sebelumnya telah dilakukan oleh Marlewski dan Zarzycki. [5]. Penyelesaian persamaan tersebut menggunakan teorema fraksi kontinu dan persamaan Pell serta dengan melakukan modifikasi aljabar. Penelitian membuktikan bahwa persamaan Diophantine non linier $x^2 - kxy+y^2+x=0$ memiliki banyak solusi bilangan bulat (x,y) ketika $k=3$. Selanjutnya, penelitian penyelesaian persamaan Diophantine non linier juga dilakukan oleh Feng dkk. [2] dalam penelitiannya menunjukkan bahwa untuk bilangan bulat positif l dengan $1 \leq l \leq 33$ bahwa terdapat banyak bilangan bulat k sedemikian sehingga persamaan Diophantine non linier $x^2 - kxy+y^2+lx=0$ memiliki solusi bilangan bulat positif (x,y). Pada tahun 2015, Urrutia dkk. [10] dalam penelitiannya menunjukkan bahwa penyelesaian persamaan Diophantine non linier $ax^2 - kxy+y^2+lx=0$ dengan menggunakan fraksi kontinu dan persamaan Pell, untuk $2 \leq a \leq 10$ menunjukkan bahwa terdapat banyak pasangan bilangan bulat positif l dan k sehingga persamaan Diophantine tersebut memiliki banyak solusi bilangan bulat positif (x,y).

Berdasarkan kajian-kajian diatas, pada penelitian kali ini peneliti tertarik untuk mengkaji lebih lanjut tentang solusi persamaan Diophantine non linier khususnya persamaan Diophantine non linier yang berbentuk $ax^2 - kxy+y^2+lx=0$. Dibadingkan dengan penelitian sebelumnya pada tahun 2015 yang dilakukan oleh Urrutia dkk. [10] pada penelitian ini peneliti akan menjelaskan secara terstruktur dalam menentukan syarat bilangan bulat k dan l sehingga persamaan Diophantine non linier $ax^2 - kxy+y^2+lx=0$ dengan $2 \leq a \leq 15$ memiliki tak hingga solusi bilangan bulat positif (x,y).

2. BAHAN DAN METODE

Metodologi yang digunakan dalam penelitian ini adalah literatur review, dengan menggunakan jurnal-jurnal yang terkait dengan materi persamaan Diophantine non linier. Berdasarkan jurnal tersebut, kemudian dituliskan secara detail dengan menggunakan teori yang terdapat dalam teori bilangan.

Fraksi Kontinu

Fraksi kontinu merupakan bentuk penulisan dari bilangan rasional maupun irrasional. Untuk bilangan rasional dapat dinyatakan dengan fraksi kontinu berhingga, sedangkan untuk bilangan irrasional dapat dinyatakan dengan menggunakan fraksi kontinu tak hingga. Burton [1] mendefinisikan fraksi kontinu berhingga sebagai berikut:

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}}}} \tag{1}$$

dengan $a_0,a_1,\ldots,a_n$ bilangan real semuanya kecuali mungkin a_0 adalah bilangan positif. Bilangan $a_0,a_1,\ldots,a_n$ merupakan penyebut parsial dari pecahan ini. Fraksi kontinu ini disebut sederhana jika semua a_i dengan $i=0,1,\ldots,n$ sebagai bilangan bulat.

Fraksi kontinu berhingga yang diawali dengan barisan tak hingga bilangan bulat $a_0,a_1,\ldots$ dan dilanjutkan dengan mendefinisikan dua barisan bilangan bulat, A, B sebagai berikut, [6]:

$A_{-2}=0$ $\quad A_{-1}=1$ $\quad A_k=a_kA_{k-1}+A_{k-2},\ k\geq 0$

$B_{-2}=1$ $\quad B_{-1}=0$ $\quad B_k=a_kB_{k-1}+B_{k-2},\ k\geq 0$

Menggunakan definisi barisan A, B, dapat ditulis Teorema 2.1 sebagai berikut:

Teorema 2.1

Jika α_0 bilangan irrasional dan di definisikan secara rekursif untuk setiap $j\geq 0$,

$$a_j=\lfloor \alpha_j \rfloor \text{ dan } \alpha_{j+1}=\frac{1}{\alpha_j-a_j}$$

Maka α_0 adalah fraksi kontinu tak hingga dengan $[a_0;a_1,a_2,\ldots]$.

Definisi 2.1

Jika $x\in\mathbb{R}$, maka bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan x adalah fungsi floor dinotasikan dengan $\lfloor x\rfloor$. Bagian fraksional dari x, merupakan selisih antara x dengan bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan x, dinotasikan $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$ sehingga $x=\lfloor x\rfloor+\{x\}$.

Teorema 2.2

Untuk setiap $x\in\mathbb{R}$ dan $n\in\mathbb{N}$, berlaku:

1. $\lfloor x+n\rfloor=\lfloor x\rfloor+n$.
2. *Banyaknya kelipatan n yang kurang dari x adalah $\left\lfloor \frac{x}{n}\right\rfloor$.*
3. $\left\lfloor \frac{\lfloor x\rfloor}{n}\right\rfloor=\left\lfloor \frac{x}{n}\right\rfloor$

Teorema 2.3

Jika $\sqrt{d}$ dengan d elemen bilangan bulat positif dan bukan bilangan kuadrat, maka:

$$\sqrt{d}=[a_0;\overline{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 2a_0}]$$

dengan $\lfloor\sqrt{d}\rfloor=a_0$ untuk suatu $n\in\mathbb{N}$.

Persamaan Diophantine Non Linier

Persamaan Diophantine non linier merupakan persamaan Diophantine yang variabelnya berpangkat lebih dari satu. Bentuk persamaan Diophantine non linier dapat berupa persaman kuadrat, kubik, persamaan *Pythagoras*, persamaan Bachet, persamaan Pell, dan lain sebagainya, Priono dkk. [7]. Menurut Rosen [8] bentuk umum persamaan Pell adalah $x^2-dy^2=l$, dengan d, l merupakan bilangan bulat dan d adalah bilangan bulat positif yang bukan kuadrat sempurna.

Persamaan Pell

Persamaan Pell merupakan salah satu bentuk persamaan Diophantine non linier. Bentuk umum dari persamaan Pell adalah:

$$x^2-Dy^2=\pm 1 \tag{2}$$

dengan D adalah elemen bilangan bulat positif. Solusi bilangan bulat persamaan Pell, dapat dicari solusinya dengan diselidiki solusi bulat positif dari persamaan tersebut. Jika D merupakan bilangan kuadrat, katakan $D=d^2$, maka solusi bulat persamaan Pell dapat dicari dengan pemfaktoran kuadrat: $\pm 1=(x-dy)(x+dy)$. Jika D bukan bilangan kuadrat sempurna, maka terdapat tak hingga banyaknya solusi bulat persamaan Pell, Tantrawan, [9].

Teorema 2.4

Misalkan d dan l merupakan bilangan bulat dan $d>0$, d bukan kuadrat sempurna dan $|l|<\sqrt{d}$. Jika $x^2-dy^2=l$, maka x/y konvergen dari fraksi kontinu $\sqrt{d}$.

Teorema 2.5

[4] *Misalkan d bilangan bulat positif dan bukan bilangan kuadrat, maka fraksi kontinu $\alpha=\sqrt{d}$ berbentuk $\frac{\sqrt{d}+P_n}{Q_n}$, $P_n^2\equiv d(\text{mod } Q_n)$ dengan P_n dan Q_n adalah bilangan bulat positif*

Teorema 2.6

[4] *Persamaan $x^2-dy^2=(-1)^nQ_n$ selalu dapat diselesaikan. Jika $l\neq(-1)^nQ_n$ dan $|l|<\sqrt{d}$,maka persamaan $x^2-dy^2=(-1)^nQ_n$ tidak memiliki solusi.*

Teorema 2.7

Jika bilangan bulat positif x,y,k pada persamaan Diophantine non linier $x^2-kxy+y^2+lx=0$ dengan $gcd(x,y,l)=1$, maka terdapat bilangan bulat positif u, v sehingga $x=u^2$, $y=uv$, dan $gcd(u,v)=1$, [4].

Teorema 2.8

Misalkan $d>1$ bilangan bulat positif dan bukan bilangan kuadrat sempurna, dengan $c\neq 0$. Jika persamaan Pell $x^2-dy^2=c$ dengan $gcd(x,y)=1$ memiliki solusi bulat positif (x,y), maka persamaan tersebut memiliki tak hingga solusi bulat positif (x,y) dengan $gcd(x,y)=1$, [10].

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini akan dibahas mengenai solusi tak hingga bilangan bulat positif (x,y) pada persamaan Diophantine non linier $ax^2-kxy+y^2+lx=0$. Sebelumnya akan ditentukan terlebih dahulu syarat dari bilangan bulat k dan l dengan menggunakan teorema fraksi kontinu dan teorema pada persamaan Pell.

Fraksi Kontinu

Pada pembahasan ini akan ditentukan syarat dari bilangan bulat k dalam persamaan Diophantine non linier $ax^2-kxy+y^2+lx=0$ menggunakan teorema pada fraksi kontinu.

Kasus a Genap Positif

Akan ditentukan bentuk fraksi kontinu untuk kasus a bernilai genap positif dengan $2\leq a\leq 15$. Sebelumnya akan dicari terlebih dahulu nilai dari bilangan bulat k, kemudian bentuk fraksi kontinu dari $\sqrt{k^2-a}$.

Teorema 3.1

Jika a genap positif dan $k=\frac{a(n+2)}{2}$ *dengan* $n\in\mathbb{N}$, *maka* $k-1<\sqrt{k^2-a}<k$.

Bukti:

Akan ditunjukan $k-1<\sqrt{k^2-a}<k$. Perhatikan $k=\frac{a(n+2)}{2}$ dengan $n\in\mathbb{N}$ sedemikian sehingga $2k=a(n+2$, karena $(n+2)>1$ maka $a(n+2)>a$. Hal ini berarti:

$$\begin{gathered}2k>a\\ 2k-1>a\\ -(2k-1)<-a\\ -2k+1<-a\\ k^2-2k+1<k^2-a\\ (k-1)^2<k^2-a\\ k-1<\sqrt{k^2-a}\end{gathered}$$

Karena $k^2-a<k^2$, maka dapat disimpulkan bahwa $\sqrt{k^2-a}<k$ sedemikian sehingga $k-1<\sqrt{k^2-a}<k$. ■

Teorema 3.2

Jika a genap positif dan $k=\frac{a(n+2)}{2}$ *dengan* $n\in\mathbb{N}$, *maka fraksi kontinu dari* $\sqrt{k^2-a}$ *adalah:*

$$\sqrt{k^2-a}=\left[k-1;\overline{1,\frac{2(k-a)}{a},1,2k-2}\right]$$

Bukti.

Jika a bilangan genap positif dan $k=\frac{a(n+2)}{2}$ dengan $\left\lfloor\sqrt{k^2-a}\right\rfloor=k-1$, maka misalkan $\alpha=\sqrt{k^2-a}$

Untuk $a_1=\lfloor\alpha\rfloor=k-1$

$$\alpha_1=\frac{1}{\alpha-\lfloor\alpha\rfloor}=\frac{1}{\sqrt{k^2-a}-(k-1)}=\frac{\sqrt{k^2-a}+(k-1)}{k^2-a-(k-1)^2}$$

$$\alpha_1=\frac{\sqrt{k^2-a}+(k-1)}{2k-(a+1)}$$

diperoleh $\alpha_1=\frac{\sqrt{k^2-a}+(k-1)}{2k-(a+1)}$, kemudian akan ditentukan a_2

$$a_2=\left\lfloor\frac{\sqrt{k^2-a}+(k-1)}{2k-(a+1)}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{\left\lfloor\sqrt{k^2-a}\right\rfloor+(k-1)}{2k-(a+1)}\right\rfloor$$

$$a_2=\left\lfloor\frac{(k-1)+(k-1)}{2k-(a+1)}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{2k-2}{2k-(a+1)}\right\rfloor=1$$

Akan dicari α_2 dengan $a_2=1$

$$\alpha_2=\frac{1}{\alpha_1-\lfloor\alpha_1\rfloor}=\frac{1}{\frac{\sqrt{k^2-a}+(k-1)}{2k-(a+1)}-1}$$

$$\alpha_2=\frac{2k-(a+1)}{\sqrt{k^2-a}-(k-a)}=\frac{\sqrt{k^2-a}+(k-a)}{a}$$

Setelah diperoleh $\alpha_2=\frac{\sqrt{k^2-a}+(k-a)}{a}$, selanjutnya akan dicari a_3

$$a_3=\left\lfloor\frac{\sqrt{k^2-a}+(k-a)}{a}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{\left\lfloor\sqrt{k^2-a}\right\rfloor+(k-a)}{a}\right\rfloor$$

$$a_3=\left\lfloor\frac{(k-1)+(k-a)}{a}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{2k-(a+1)}{a}\right\rfloor$$

Untuk $k=\frac{a(n+2)}{2}$, disubstitusikan ke a_3 sehingga akan diperoleh

$$a_3=\left\lfloor\frac{\frac{2a(n+2)}{2}-(a+1)}{a}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{a(n+2)}{a}-\frac{(a+1)}{a}\right\rfloor$$

$$a_3=\left\lfloor(n+2)-\frac{(a+1)}{a}\right\rfloor=(n+2)+\left\lfloor-\frac{(a+1)}{a}\right\rfloor$$

$$a_3=(n+2)+(-2)=(n+2)-2=\frac{2k}{a}-2=\frac{2(k-a)}{a}.$$

Selanjutnya akan dicari α_3 dengan $a_3=\frac{2(k-a)}{a}$,

$$\alpha_3=\frac{1}{\alpha_2-\lfloor\alpha_2\rfloor}=\frac{1}{\frac{\sqrt{k^2-a}+(k-a)}{a}-\frac{2(k-a)}{a}}$$

$$\alpha_3=\frac{a}{\sqrt{k^2-a}-(k-a)}=\frac{\sqrt{k^2-a}+(k-a)}{2k-(a+1)}.$$

Kemudian akan ditentukan a_4 dengan $\alpha_3=\frac{\sqrt{k^2-a}+(k-a)}{2k-(a+1)}$

$$a_4=\left\lfloor\frac{\sqrt{k^2-a}+(k-a)}{2k-(a+1)}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{\left\lfloor\sqrt{k^2-a}\right\rfloor+(k-a)}{2k-(a+1)}\right\rfloor$$

$$a_4=\left\lfloor\frac{2k-(a+1)}{2k-(a+1)}\right\rfloor=1$$

dengan $a_4=1$ dapat ditentukan α_4 sehingga diperoleh

$$\alpha_4=\frac{1}{\alpha_3-\lfloor\alpha_3\rfloor}=\frac{1}{\frac{\sqrt{k^2-a}+(k-a)}{2k-(a+1)}-1}$$

$$\alpha_4=\frac{2k-(a+1)}{\sqrt{k^2-a}-(k-1)}=\frac{2k-(a+1)}{\sqrt{k^2-a}-(k-1)}$$

$$\alpha_4=\frac{\sqrt{k^2-a}+(k-1)}{1}.$$

Langkah selanjutnya akan dicari a_5 dengan $\alpha_4=\frac{\sqrt{k^2-a}+(k-1)}{1}$

$$a_5=\left\lfloor\frac{\sqrt{k^2-a}+(k-1)}{1}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{\left\lfloor\sqrt{k^2-a}\right\rfloor+(k-1)}{1}\right\rfloor$$

$a_5=2k-2$.

Sedemikian sehingga diperoleh $a_5=2k-2$. Oleh sebab itu, terbukti bahwa fraksi kontinu dari $\sqrt{k^2-a}$ adalah:

$$\sqrt{k^2-a}=[a_1;\overline{a_2,a_3,a_4,a_5}]$$

$$\sqrt{k^2 - a} = \left[k - 1; \overline{1, \tfrac{2(k-a)}{a}, 1, 2k - 2}\right] \qquad \blacksquare$$

Kasus a Ganjil Positif

Akan ditentukan bentuk fraksi kontinu untuk kasus a bernilai ganjil positif dengan $2 \leq a \leq 15$. Sebelumnya akan dicari terlebih dahulu nilai dari bilangan bulat k, kemudian bentuk fraksi kontinu dari $\sqrt{k^2 - a}$.

Teorema 3.3

Jika a ganjil positif $a \geq 3$ dan $k = a(n+1)$ dengan $n \in \mathbb{N}$, maka $k - 1 < \sqrt{k^2 - a} < k$.

Teorema 3.4

Jika a ganjil positif $a \geq 3$ dan $k = a(n+1)$ dengan $n \in \mathbb{N}$, maka fraksi kontinu dari $\sqrt{k^2 - a}$ adalah

$$\sqrt{k^2 - a} = \left[k - 1; \overline{1, \tfrac{2(k-a)}{a}, 1, 2k - 2}\right].$$

Pembuktian Teorema 3.3 dan Teorema 3.4 analog dengan bukti pada Teorema 3.1 dan Teorema 3.2.

Persamaan Pell

Pada pembahasan ini akan ditentukan syarat dari bilangan bulat l dalam persamaan Diophantine non linier $ax^2 - kxy + y^2 + lx = 0$ dengan menggunakan teorema-teorema pada persamaan Pell.

Teorema 3.5

Untuk sembarang bilangan bulat positif $a \geq 2$, terdapat tak hingga pasangan bilangan bulat k dan l sedemikian sehingga $ax^2 - kxy + y^2 + lx = 0$ mempunyai tak hingga solusi (x, y) dengan $gcd(x, y, l) = 1$.

Bukti.

Diketahui bahwa $gcd(x, y, l) = 1$, berdasarkan Teorema 2.7 dengan mensubstitusikan $x = u^2$, $y = uv$ maka akan diperoleh:

$$au^2 - kuv + v^2 + l = 0 \qquad (3)$$

Persamaan (3) diubah kedalam bentuk persamaan Pell $x^2 - dy^2 = l$ sehingga diperoleh:

$$\left(v - \frac{ku}{2}\right)^2 - \left(\frac{k^2}{4} - a\right)u^2 = -l \qquad (4)$$

Langkah selanjutnya yaitu membagi bukti menjadi dua kasus, untuk kasus a genap positif dan kasus a ganjil positif dengan $2 \leq a \leq 15$.

Kasus a Genap Positif

Ambil $k = 2k_1$ dengan $k_1 = \frac{a(n+2)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Substitusikan $k = 2k_1$ kedalam Persamaan (4), maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$(v - k_1 u)^2 - \left({k_1}^2 - a\right)u^2 = -l \qquad (5)$$

dengan

$$Q_n = \begin{cases} a(n+1) - 1, Q_{4t+1} = Q_{4t+3} \\ \qquad a, \ Q_{4t+2} & , t \geq 0 \\ \qquad 1, \ Q_{4t+4} \end{cases}$$

Selanjutnya, berdasarkan Teorema 2.6 dapat dicari bilangan bulat l maka:

$$-l = (-1)^n Q_n = (-1)^{4t+3}[a(n+1) - 1]$$
$$-l = -[a(n+1) - 1]$$
$$l = a(n+1) - 1$$

Persamaan (5) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$x^2 - (k^2 - a)y^2 = -l \qquad (6)$$

Persamaan (6) memiliki tak hingga solusi bilangan bulat positif (x, y), jika $k^2 - a$ merupakan bukan kuadrat sempurna dan $gcd(x, y) = 1$.

Akan dibuktikan bahwa $k^2 - a$ bukan kuadrat sempurna. Perhatikan $k = \frac{a(n+2)}{2}$ dengan $n \in \mathbb{N}$ dan a genap positif, maka:

$$k^2 - a = \left(\frac{a(n+2)}{2}\right)^2 - a$$
$$k^2 - a = \frac{a^2(n+2)^2}{4} - a$$

Sehingga terbukti bahwa $k^2 - a$ bukan kuadrat sempurna.

Berdasarkan Persamaan (5) dan (6) diperoleh:

$v - k_1 u = x$ dan $u = y$

$v = k_1 y$ dan $u = y$

karena u sudah ditentukan, selanjutnya Persamaan (3) dikalikan dengan u^2 akan menghasilkan:

$$a(u^2)^2 - k(u^2)(uv) + (uv)^2 + lu^2 = 0 \qquad (7)$$

merupakan persamaan dengan solusi $x = u^2, y = uv$ dengan $gcd(u, v) = 1$ dan $k^2 - a$ bukan kuadrat sempurna. Berdasarkan Teorema 2.7 dan Teorema 2.8 terbukti bahwa persamaan $ax^2 - kxy + y^2 + lx = 0$ memiliki tak hingga solusi bilangan bulat positif.

Kasus a Ganjil Positif

Ambil $k = 2k_1$ dengan $k_1 = a(n+1), n \in \mathbb{N}$. Substitusikan $k = 2k_1$kedalam Persamaan (4), maka akan diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$(v - k_1 u)^2 - \left({k_1}^2 - a\right)u^2 = -l \qquad (8)$$

dengan

$$Q_n = \begin{cases} a(2n+1) - 1, Q_{4t+1} = Q_{4t+3} \\ \qquad a, \ Q_{4t+2} & , t \geq 0 \\ \qquad 1, \ Q_{4t+4} \end{cases}$$

Selanjutnya, berdasarkan Teorema 2.6 dapat dicari bilangan bulat l maka:

$$-l = (-1)^n Q_n = (-1)^{4t+3}[a(2n+1) - 1]$$
$$-l = -[a(2n+1) - 1]$$
$$l = a(2n+1) - 1.$$

Persamaan (8) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$x^2 - (k^2 - a)y^2 = -l \qquad (9)$$

Persamaan (9) memiliki tak hingga solusi bilangan bulat positif (x, y), jika $k^2 - a$ merupakan bukan kuadrat sempurna dan $gcd(x, y) = 1$. Pembuktian $k^2 - a$ merupakan bukan kuadrat sempurna analog dengan kasus a genap positif. Berdasarkan Persamaan (5) dan (6) diperoleh:

$v - k_1 u = x$ dan $u = y$

$v = k_1 y$ dan $u = y$

Karena u sudah ditentukan, selanjutnya Persamaan (3) dikalikan dengan u^2 akan menghasilkan:

$$a(u^2)^2 - k(u^2)(uv) + (uv)^2 + lu^2 = 0 \qquad (10)$$

merupakan persamaan dengan solusi $x = u^2, y = uv$ dengan $gcd(u, v) = 1$ dan $k^2 - a$ bukan kuadrat sempurna. Berdasarkan Teorema 2.7 dan Teorema 2.8

terbukti bahwa persamaan $ax^2 - kxy + y^2 + lx = 0$ memiliki tak hingga solusi bilangan bulat positif. ■

Solusi Persamaan Diophantine Non Linier $ax^2 - kxy + y^2 + lx = 0$

Penyelesaian persamaan Diophantine non linier $ax^2 - kxy + y^2 + lx = 0$ untuk $2 \le a \le 15$. Untuk a genap positif diperoleh bilangan bulat l=$a(n+1)-1$ dan bilangan bulat k=$a(n+2)$. Tabel 1 menunjukkan solusi-solusi bulat positif (x, y) persamaan Diophantine non linier $ax^2 - kxy + y^2 + lx = 0$.

Tabel 1. Solusi a Genap Positif

a	n	k	l	(x, y)
2	1	6	3	(1,5),(4,22), (196,1106)
	2	8	5	(1,7),(9,69), (729,5643)
	3	10	7	(1,9),(16,156), (1936,18964)
	4	12	9	(1,11), (25,295), (4225,49955)
	5	14	11	(1,13), (36, 498), (8100,112230)
4	1	12	7	(1,11), (4,46), (1024, 11936)
	2	16	11	(1,15), (9,141) , (3481, 54811)
	3	20	15	(1,19), (16,316) , (8836, 174934)
	4	24	19	(1,23), (25,595) , (18769, 447305)
	5	28	23	(1,27), (36,1002) , (35344, 984556)
6	1	18	11	(1,17), (4,70), (2500, 44150)
	2	24	17	(1,23), (9,213), (8281, 196651)
	3	30	23	(1,29), (16,476), (20736, 617904)
	4	36	29	(1,35), (25,895), (43681, 15652001)
	5	42	35	(1,41), (36,1506), (499849, 29949227)
8	1	24	15	(1,23), (4,94), (4624, 109412)
	2	32	23	(1,31), (9,285) , (15129, 480315)
	3	40	31	(1,39), (16,636) , (37636, 1497874)
	4	48	39	(1,47),(25,1195) , (78961, 3776921)
	5	56	47	(1,55), (36,2010) , (147456, 8236416)
10	1	30	19	(1,29), (4,118) , (7396, 219386)
	2	40	29	(1,39), (9,357) , (24025, 954955)
	3	50	39	(1,49), (16,796) , (59536, 2964844)
	4	60	49	(1,59), (25,1495) , (124609, 7455713)
	5	70	59	(1,69), (36,2514) , (232324, 16229422)
12	1	36	23	(1,35), (4,142) , (12100, 431528)
	2	48	35	(1,47), (9,429) , (37249, 1778590)
	3	60	47	(1,59), (16,956) , (90000, 5381939)
	4	72	59	(1,71), (25,1795) , (185761, 1334759)
	5	84	71	(1,83), (36,3018) , (343396, 28796123)
14	1	42	27	(1,41), (4,166) , (14884, 620126)
	2	56	41	(1,55), (9,501) , (55225, 3078731)
	3	70	55	(1,69), (16, 1116) , (129600, 9046005)
	4	84	69	(1,83), (25,2095) , (263169, 22062246)
	5	98	83	(1,97), (36,3522) , (481636, 471314121)

Penyelesaian persamaan Diophantine non linier $ax^2 - kxy + y^2 + lx = 0$ untuk $2 \le a \le 15$. Untuk a ganjil positif diperoleh bilangan bulat l=$a(2n+1)-1$ dan bilangan bulat $k = 2a(n+1)$. Tabel 2 menunjukkan solusi-solusi bulat positif (x, y) yang mungkin dalam persamaan Diophantine non linier $ax^2 - kxy + y^2 + lx = 0$.

Tabel 2. Solusi a Ganjil Positif

a	n	k	l	(x, y)
3	1	12	8	(1,11), (9,105) , (1849, 21715)
	2	18	14	(1,17), (25,445) , (10201,181901)
	3	24	20	(1,23), (49,1169) , (33489,799527)
	4	30	26	(1,29), (81,2421) , (83521, 2497249)
	5	36	32	(1,35), (121,4345) , (175561,6305531)
5	1	20	14	(1,19), (9,177) , (5625, 111075)
	2	30	24	(1,29), (25,745) , (29929, 892853)
	3	40	34	(1,39), (49,1953) , (96721, 3856711)
	4	50	44	(1,49), (81,4041) , (239121, 11932089)
	5	60	54	(1,59), (121,7249) , (499849, 29949227)
7	1	28	20	(1,27), (9, 249) , (11449, 317683)
	2	42	34	(1,41), (25,1045) , (60025, 2511005)
	3	56	48	(1,55),(49,2737) , (192721, 10768231)
	4	70	62	(1,69), (81,5661) , (474721, 47920195)
	5	84	76	(1,83), (121,10153) , (990025, 83079515)
9	1	36	26	(1,35), (9,321) , (19321, 690691)
	2	54	44	(1,53), (25,1345) , (100489, 5409605)
	3	72	62	(1,71), (49,3521) , (321489, 23106951)
	4	90	80	(1,89), (81,7281) , (790321, 71049769)
	5	108	98	(1,107), (121,13057, (1646089, 177640331)
11	1	44	32	(1,43), (9,393) , (29241, 1279251)
	2	66	54	(1,65), (25, 1645) , (151321, 996901)
	3	88	76	(1,87), (49,4305) , (483025, 42445735)
	4	110	98	(1,109), (81,8901) , (1185921, 130332609)
	5	132	120	(1,131), (121,15961) , (2468041, 325575611)
13	1	52	38	(1,51), (9,465) , (41209, 2132515)
	2	78	64	(1,77), (25,1945) , (212521, 16541141)
	3	104	90	(1,103), (49,5089) , (677329,70357447)
	4	130	116	(1,129), (81,10521) , (1661521, 215831449)
	5	156	142	(1,155), (121,18865) , (3455881, 538829291)
15	1	60	44	(1,59), (9,537) , (55225, 3299635)
	2	90	74	(1,89), (25,2245) , (284089, 2552073)
	3	120	104	(1,119), (49,5873) , (904401, 108414951)
	4	150	134	(1,149), (81,12141) , (2128681, 319089139)
	5	180	164	(1,179), (121,21769), (8381025, 1507885757)

4. KESIMPULAN

Dalam penelitian ini diperoleh hasil dengan menggunakan teorema-teorema pada fraksi kontinu dan persamaan Pell terdapat pasangan-pasangan bilangan bulat k dan l yang memenuhi:

1. Untuk a genap positif $k = a(n+2)$ dan $l = a(n+1) - 1$ dengan $n \in \mathbb{N}$.
2. Untuk a ganjil positif $k = 2a(n+1)$ dan $l = a(2n+1) - 1$ dengan $n \in \mathbb{N}$.

Sedemikian sehingga dapat disimpulkan bahwa persamaan Diophantine non linier $ax^2 - kxy + y^2 + lx = 0$ untuk $2 \le a \le 15$ yang memenuhi syarat tersebut memiliki tak hingga solusi bilangan bulat positif (x, y) dengan $gcd(x, y, l) = 1$.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Burton. D. M., *Elementary Number Theory*. Me Graw-Hill, New York, 2007.

[2] Feng. L., Yuan, P., dan Hu, Y., “On The Diophantine Equation $x^2 - kxy + y^2 + lx = 0$,” *Researchgate*, vol. 13, issue 1, hlm. 1-8, 2013.

[3] Hidayatullah. R., Thresye, dan Huda, N., “Eksistensi Solusi Persamaan Pell Negatif,” *Jurnal Matematika Murni dan Terapan “epsilon”*, vol. 11, issue 2, hlm. 47-55, 2017.

[4] Keng. H. L., *Introduction Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[5] Marlewski, A., dan Zarzycki, P., “Infinitely many positive solutions of the Diophantine $x^2 - kxy + y^2 + x = 0$,” *International Journal Computers and Mathemathics with Applications*, vol. 47, issue 11, hlm. 115–121, 2004.

[6] Mollin, R. A., *Fundamental Number Theory*, CRC Press, New York, 2007.

[7] Priono, U., Sanusi, W., Abdy, M., “Aplikasi Ring Kuadratik dalam Menyelesaikan Persamaan

Pell" *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, vol. 2, issue 2, hlm. 9-18, 2019.
[8] Rosen. K. H., *Elementary Number Theory and lts Applications*, edisi ke enam, Addison-Wesley, Canada, 1984.
[9] Tantrawan, M., *Persamaan Diophantine Non-Linear*, 2020, [Online]. Tersedia di: https://teoribilangan.mipa.ugm.ac.id.
[10] Urrutia. J. D., Aranas, J. M., Lara, J. A., dan Maceda, D, "On The Diophantine Equation $ax^2 - kxy + y^2 + lx = 0$," *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 622, issue 1, hlm. 1-10, 2015.