Perwira Journal of Science and Engineering (PJSE)
E-ISSN : 2775-8486
Volume 1 Nomor 2

REVIEW PERSAMAAN BLACK-SCHOLES FRAKSIONAL DIMODIFIKASI

Agus Sugandha
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman
Email: agus.sugandha@unsoed.ac.id

***Abstrak: Review Persamaan Black-Scholes Fraksional Dimodifikasi*.** Paper ini akan dibahas solusi dari persamaan Black-Scholes fraksional yang merupakan bentuk umum dari persamaan Black-Scholes dan kebaruan penelitian tentang persamaan Black-Scholes yang dimodifikasi. Adapun metode-metode untuk mencari solusi dari persamaan Black Scholes Fraksional sudah banyak ditulis dalam banyak jurnal internasional. Solusi persamaan Black Scholes fraksional dalam hal ini ditinjau dengan pendekatan Kalkulus Fraksional. Dengan pendekatan Kalkulus Fraksional proses penyelesaian dalam mencari solusi persamaan Black Scholes Fraksional menjadi lebih efisien. Beberapa Metode yang digunakan untuk mencari solusi Persamaan Black Scholes Fraksional diantaranya adalah metode transformasi Sumudu, metode ekspansi deret, metode perturbasi Homotopi, metode dekomposisi Adomian, dan metode dekomposisi Laplace Adomian.

Kata kunci: dekomposisi Adomian, dekomposisi Laplace-Adomian, ekspansi deret, Kalkulus Fraksional, persamaan Black-Scholes Fraksional, perturbasi homotopi, solusi, transformasi Sumudu.

Abstract: ***Review The Modified Fractional Black-Scholes Equation.*** *This paper will discuss the solution of the fractional Black-Scholes equation which is a general form of the Black-Scholes equation and the novelty of research on the modified Black-Scholes equation. The methods for finding solutions to the fractional Black Scholes equation have been written in many international journals. The solution to the fractional Black Scholes equation in this case is reviewed by the Fractional Calculus approach. With the Fractional Calculus approach, the solution process in finding solutions to the Fractional Black Scholes equation becomes more efficient. Some of the methods used to find solutions to the Fractional Black Scholes Equation include the Sumudu transformation method, the series expansion method, the Homotopy perturbation method, the Adomian decomposition method, and the Laplace Adomian decomposition method.*

Keywords*:* Adomian decomposition, Laplace-Adomian decomposition, series expansion, Fractional Calculus, Fractional Black-Scholes equation, homotopy perturbation, solutions, Sumudu transformation.

PENDAHULUAN

Dalam perkembangan ilmu Matematika khusunya persamaan difererensial parsial, sekarang ini ditemukan banyak sekali aplikasinya dalam bidang-bidang ilmu lain. Misalnya pada masalah penyebaran penyakit, mekanika fluida, dan masalah gelombang. Tentu saja ilmu dasar yang digunakan dalam persamaan difeernsial parsial adalah kalkulus.

Sementara itu, kalkulus fraksional lahir pada tahun 1695. Kalkulus fraksional dimulai ketika l'Hopital, salah satu *founders* kalkulus, menulis surat kepada Leibnitz yang merupakan Bapak Kalkulus, arti dari $\frac{d^n y}{dx^n}$ untuk $n = \frac{1}{2}$. Kemudian Leibnitz menjawab bahwa hal tersebut merupakan sebuah paradoks yang suatu saat nanti akan sangat berguna. Kemudian, selama tiga dekade terakhir materi tentang kalkulus fraksional menemukan aplikasi dalam banyak masalah di berbagai disiplin ilmu seperti aliran fluida, difusi, anomaly difusi, reaksi difusi turbulensi, jaringan listrik, fisika, kimia, gelombang, teori distribusi statistik dan matematika keuangan.

Dalam matematika keuangan salah satu aplikasinya yaitu masalah investasi. Tujuan dari investasi ini adalah untuk memperoleh keuntungan dalam pasar keuangan. Dalam hal ini, investor mempunyai dua pilihan, yaitu pilihan untuk membeli aset yang diperdagangkan di dalam pasar keuangan atau menjual aset dengan tujuan untuk memeperoleh keuntungan. Dalam ilmu ekonomi, hal ini disebut dengan masalah opsi.

Opsi adalah suatu jenis kontrak antara dua belah pihak, dimana satu pihak memberikan hak kepada pihak lain untuk menjual atau membeli aset tertentu pada harga dan periode tertentu. Berdasarkan jenis hak yang diberikan, opsi dapat dibedakan menjadi dua yaitu opsi *call* dan opsi *put*. Opsi *call* adalah suatu tipe kontrak yang memberikan hak kepada pemegang opsi unruk membeli dari penjual opsi sejumlah saham tertentu pada harga dan jangka waktu tertentu. Opsi *put* merupakan opsi yang memberikan yang memberikan hak kepada pemegangnya untuk menjual saham dalam jumlah tertentu kepada pembeli opsi pada waktu atau harga yang telah ditentukan. Sedangkan berdasarkan periode waktu penggunaan, opsi dapat dibedakan menjadi dua yaitu opsi tipe Eropa dan opsi tipe Amerika. Tipe Eropa menunnjukkan bahwa opsi tersebut dapat dilaksanakan pada saat jatuh tempo saja. Sedangkan tipe Amerika menunjukkan bahwa opsi tersebut dapat dilaksanakan pada saat jatuh tempo atau sebelumnya.

Fisher Black dan Miron Scholes pada tahun 1973 merumuskan suatu metode untuk menetapkan harga opsi. Metode tersebut sekarang dikenal dengan metode Black-Scholes. Dalam perkembanganya, metode Black-Scholes yang digunakan untuk menentukan harga opsi tidak hanya menjadi permasalahan dalam bidang matematika keuangan dan ekonomi saja, tetapi sudah berkembang juga untuk bidang matematika. Hal ini sangat wajar, karena persamaan Black-Scholes menggunakan Persamaan Diferensial Parsial. Dalam hal ini untuk mencari solusi dari persamaan Diferensial Parsial bukanlah suatu pekerjaan yang mudah di dalam bidang Matematika. Untuk mencari solusi dari persamaan Black-Scholes dapat menggunakan teori integral Ito, transformasi Fourier atau secara numerik dengan menggunakan metode Beda Hingga. Dari solusi yang diperoleh tersebut, kemudaian dapat ditentukan formula opsi *put* dan opsi *call*-nya.

Dari persamaan Black-Scholes tersebut dikembangkan oleh ahli matematika menjadi persamaan Black-Scholes Fraksional. Sehingga dalam hal ini persamaan Black-Scholes merupakan kasus khusus dari persamaan Black-Scholes Fraksional. Adapaun beberapa metode untuk mencari solusi persamaan Black Scholes Fraksional adalah transformasi Sumudu, Metode Perturbasi Homotopi, Metode dekomposisi Adomian, Metode dekomposisi Adomian Laplace, dan Metode transformasi Diferensial. Taib, Kichman & Elbelese (2013) menggunakan kombinasi metode perturbasi *homotopy*, metode transformasi Sumudu dan polinomial He’s untuk menentukan solusi persamaan Black-Scholes Fraksional. Kemudian Ghaedahari (2015) menggunakan metode dekomposisi deret beserta analisisnya untuk mencari solusi dari persamaan Black-Scholes Fractional. Sedangkan Khan (2016) menentukan solusi dari persamaan Black-Scholes Fraksional dengan menggunakan transformasi Sumudu dan sifat-sifat turunan dan integral Fraksional. Selanjtnya, pada tahun 2018, Yavus dan Necati menyeesaikan persamaan Black-Scholes Fraksional dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian. Tahun berikutnya, Kaya & Yilmas menyelesaikan berhasil Persamaan Diferensial Parsial dengan menggunakan sifat sifat transformasi Sumudu. Masih pada tahun yang sama yaitu 2019, Uddin and Taufiq mengunakan metode transformasi Laplace dikombinasikan dengan metode kernel radial untuk menentukan solusi dari persamaan Black-Scholes Fraksional. Dari beberapa penelitian tersebut, solusi analitik dari persamaan Black-Scholes Fraksional merupakan dalam bentuk deret tak hingga fungsi Mittag Lefler.

Sementara itu untuk masalah eksistensi dan ketunggalan solusi dari persamaan Black-Scholes Fraksional ditulis oleh Batogna pada tahun 2018. Beberapa alat (*tools*) yang digunakan untuk membahas masalah eksistensi dan ketunggalan tersebut diantaranya dengan teorema Picard Lindelof, teorema titik tetap Banach, dan teorema Arzella Ascoli. Selain itu juga dibahas mengenai solusi numerik dari persamaan Black-Scholes Fraksional secara numerik dengan menggunakan metode Crank-Nickholson.

KAJIAN LITERATUR

Kajian mengenai persamaan Black-Scholes fraksional sangat penting dilakukan, karena dari hasil kajian tersebut dapat dicari solusi dan formula untuk opsi *call* dan opsi *put*. Meski demikian mayoritas dari penelitian yang dilakukan, masih terbatas mencari solusi. Sehingga penelitian untuk mencari formula opsi *call* dan opsi *put* dari persamaan Black-Scholes fraksional masih sangat terbuka. Bila formula opsi call dan put dapat diperoleh maka dapat dianalisa kapan sebaiknya membeli asset atau menahan dulu atau menjual asset, dengan tujuan untuk memperoleh keuntungan. Sehingga berdasarkan hal diatas maka formula opsi call dan put dari persamaan Black-Scholes fraksional dapat digunakan untuk pengambilan keputusan oleh investor.

Penelitian yang akan dilakukan diawali dengan persamaan difusi telegraph. Kemudian berdasarkan persamaan difusi telegraph dapat dikembangkan menjadi persamaan Black-Schloles. Karena persamaan Black-Scholes merupakan kejadian khusus dari persamaan difusi, sehingga dari persamaan Black-Scholes dibentuk persamaan Black-Scholes fraksional. Berdasarkan persamaan Black-Scholes fraksional dapat dibentuk menjadi persamaan Black-Scholes Fraksional yang dimodifikasi. Penelitian mengenai persamaan Black-Scholes Fraksional yang dimodifikasi belum diteliti dan dibahas, sehingga merupakan materi yang menarik untuk diteliti lebih jauh.

Persamaan Black-Scholes dengan nilai opsi dinyatakan sebagai

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau}+\frac{\sigma x^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+r(\tau)x\frac{\partial\psi}{\partial x}-r(\tau)\psi=0\,;\quad (x,\tau)\in\mathbb{R}^+\times(0,T) \tag{2.1}$$

dengan $\psi(x,\tau)$ nilai opsi Eropa pada saat harga aset adalah x dan pada waktu τ, sedangkan T adalah *maturity*, $r(\tau)$ bunga bebas resiko dan $\sigma(x,r)$ menunjukkan fungsi volalitas dari aset dasar (*underlying asset)* (Ghaedahari & Ranjbar, 2015). Fungsi *payoff* dinyatakan sebagai $\psi_c(x,\tau)$=max $(x-E,0)$, $\psi_p(x,\tau)$=max $(E-x,0)$, dimana ψ_c dan ψ_p harga dari opsi *call* dan opsi *put* Eropa, sedangkan E adalah *exercise price* untuk opsi (Khan & Ansari, 2016).

Mengunakan transformasi $(x,\tau)=Eu(S,\tau)$, $S=Ee^x$, $t=T-2\sigma^2$, $k=2r/\sigma^2$ diperoleh:

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}+(k-1)\frac{\partial u}{\partial S}-ku \tag{2.2}$$

dengan $u(0,\tau)=0$, $u(S,\tau)\approx\tau$ untuk $S\to\infty$ dan $u(S,0)=e^x-1$, $x\geq 0$

Sedangkan persamaan Black-Scholes fraksional adalah persamaan berbentuk

$$\frac{\partial^q\psi}{\partial\tau^q}+\frac{\sigma x^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+r(\tau)x\frac{\sigma\psi}{\partial x}-r(\sigma)\psi=0 \tag{2.3}$$

dengan$(x,\tau)\in\mathbb{R}^+\times(0,T)$,$0<q\leq 1$(Khan & Ansari, 2016). Arti symbol symbol yang ada didalam persamaan Black-Scholes fraksional adalah sama sama seperti pada persamaan Black-Scholes. Perbedaanya

terletak pada orde turunan parsial ψ terhadap τ pada persamaan Black-Scholes adalah satu, sedangkan pada persamaan Black Scholes fraksional adalah q dengan $0 < q \leq 1$.

METODE PENELITIAN

Metodologi penelitian pada tulisan ini adalah *literature review*. Pustaka dihimpun dari artike-artikel pada berbagai jurnal yang membahas solusi persamaan Black-Scholes Fraksional. Selanjutnya, dilakukan penulisan kembali langkah-langkah untuk mendapatkan solusinya. Kemudian berdasarkan persamaan Black-Scholes Fraksional sangat memungkinkan sekali untuk dibentuk persamaan Black-Scholes Fraksioanal Dimodifikasi. Akan diperlihatkan bahwa persamaan Black-Scholes Fraksional merupakan kebaruan dalam penelitian yang sangat terbuka untuk diuangkap lebih jauh. Demikian juga untuk masalah opsi call dan put dari persamaan Black-Scholes Fraksional Dimodifikasi juga sangat tebuka untuk diteliti.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Persamaan Black Scholes Fraksional

Model Persamaan Black-Scholes dengan nilai opsi di dinyatakan sebagai

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau}+\frac{\sigma x^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+r(\tau)x\frac{\sigma\psi}{\partial x}-r(\tau)\psi=0$$

$$(x,\tau)\in R^+\times(0,T)$$

dengan $\psi(x,\tau)$ nilai opsi Eropa pada saat harga aset x pada waktu τ sedangkan T adalah *maturity*, $r(\tau)$ bunga bebas resiko dan $\sigma(x,r)$ menunjukkan fungsi volalitas dari *underlying asset* (aset dasar). Fungsi Payoff dinyatakan sebagai

$\psi_c(x,\ \tau)$=max $(x-E,0)$, $\psi_p(x,\ \tau)$=max $(E-x,0)$,

dengan ψ_c dan ψ_p harga dari *European Call* dan opsi put, sedangkan E adalah *exercise price* untuk opsi. Sedangkan persamaan Black-Scholes Fraksional adalah persamaan

$$\frac{\partial^q\psi}{\partial\tau^q}+\frac{\sigma x^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+r(\tau)x\frac{\sigma\psi}{\partial x}-r(\sigma)\psi=0$$

dengan $(x,\tau)\in R^+\times(0,T)$, $0<q\leq 1$

Berikut ini adalah beberapa metode untuk menyelesaikan persamaan Black-Scholes Fraksional:

3.2 **Metode Transformasi Sumudu**.

Dalam *paper* dari Waseem Asghar Khan dan Faryal Aijas Ansari dengan judul *European Option Pricing of Fractional Black-Scholes Model using Sumudu Transform and Its Derivatives*, pencarian solusi dari persamaan persamaan Black-Scholes Fraksional dilakukan dengan menggunakan metode transformasi Sumudu fraksional. *Transformasi Sumudu* adalah himpunan fungsi

$A=\{\psi(\tau)\}/\quad \exists\, M,t_1,t_2>0,\ |\psi(\tau)|<Me^{\tau/t_j}$, jika $\tau\in(-1)^j\times[0,\sim]$

dengan menggunakan rumus

$$F(u)=S[\psi(\tau)]=\int_0^{\sim}\frac{1}{u}e^{-\tau/u}\psi(\tau)d\tau$$

Alat untuk mencari solusi persamaan Black-Scholes Fraksional menggunakan definisi dan teorema berikut. Operator integral fraksional Riemann-Liouville dari *order q* dari fungsi $\mu(x)\in K_\omega$ dengan $\omega\geq -1$ diberikan sebagai berikut:

$$J^q\psi(x)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^x(x-\tau)^{q-1}\psi(\tau)d\tau, & q>0, x>0\\ \psi(x) & ,q=0\end{cases}$$

Operator J^q memiliki sifat sifat berikut:

a. $J^0\psi(x)=\psi(x)$
b. $J^q j^\tau\ \psi(x)=J^{q+\tau}\psi(x)$
c. $J^q j^\tau\ \psi(x)=J^\tau J^q\ \psi(x)$
d. $J^q x^\zeta=\frac{\Gamma(\zeta+1)}{\Gamma(q+\zeta+1)}x^{q+\zeta}$
e. $J^q C=\frac{C}{\Gamma(q+1)}x^q$

Definisi 1:

Turunan Fraksional Caputo D^q fungsi $\psi(x)$ dari bilangan real q seemikian sehingga

$m-1<q\leq m, m\in N,$ *untuk* $x>0$ *dan* $\psi\in C_{-1}^m$ sebagai

$$D^q\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-q)}\int_0^x (x-\tau)^{m-q-1}\psi^{(m)}(\tau)d\tau \\ \frac{\partial^m\psi(x)}{\partial x^m} \qquad q = m \end{cases}$$

Definisi 2:

Transformasi Sumudu $S[\psi(\tau)]$ dari integral fraksional Riemann-Liouville diberikan oleh:

$$S[J^q\psi(\tau)] = u^q S[\psi(\tau)]$$

Definisi 3:

Transformasi sumudu $S[\psi(\tau)]$ dari turunan fraksional Caputo diberikan oleh

$$S[D^q\psi(\tau)] = u^{-q}S[\psi(\tau)] - \sum_{k=0}^{m-1} u^{-q+k}\psi^{(k)}(0),\ m-1 < q \leq m$$

dan invers transformasi sumudu diberikan oleh :

$$S^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m-1} u^k\psi^{(k)}(0)\right)=\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\tau^k\psi^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)}$$

Metode untuk mencari solusi persamaan Black-Scholes fraksional dengan menggunakan metode transformasi sumudu fraksional. Hasilnya penyelesaian/solusi dari persamaan Black-Scholes Fraksional dalam bentuk

$$\psi(x,\tau) = \sum_{n=0}^{\sim} \psi_n(x,\tau) = \sum_{n=0}^{\sim} f_n(x)\frac{\tau^{nq}}{\Gamma(qn+1)}$$

3.3 Metode Ekspansi Deret.

Andaikan persamaan diferensial fraksional

$$D_\tau^q\psi(x,\tau) + L[\psi(x,\tau)] + N[\psi(x,\tau)] = Q(x,\tau) \quad ; \quad \tau > 0, m-1 < q \leq m$$

dengan kondisi awal $\psi(x,0) = f_0(x)$ dan L adalah operator diferensial linier, N adalah operator diferensial non linier

$$S[D_\tau^q\psi(x,\tau)]+S[L[\psi(x,\tau)]+N[\psi(x,\tau)]=S[Q(x,\tau)].$$

Dengan menggunakan sifat transformasi Sumudu, diperoleh:

$$S[\psi(x,\tau)]= \psi(x,0)+u^qS[Q(x,\tau)-L[\psi(x,\tau) - N[\psi(x,\tau)].$$

Selanjutnya, dengan menggunakan invers Sumudu, diperoleh solusi dari persamaan Black Scholes Fraksional:

$$\psi(x,\tau) = \psi(x,0) + S^{-1}\ [u^qS[Q(x,\tau)-L[\psi(x,\tau) - N[\psi(x,\tau)]]$$

$$\psi(x,\tau)= \psi(x,0)+J_\tau^q[Q(x,\tau)-L[\psi(x,\tau) - N[\psi(x,\tau)]]$$

dengan

$$\psi_0((x,\tau))=\psi(x,0) = f_0(x)$$

$$\psi_{n+1}(x,\tau)=J^q(Q(x,\tau))-J^q(L[\psi_n(x,\tau)]-J^q(N\ [\psi_n(x,\tau)])$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\frac{\tau^{nq}}{\Gamma(qn+1)}$$

$$\psi(x,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\frac{\tau^{nq}}{\Gamma(qn+1)}$$

3.3 Metode Perturbasi Homotopi.

Dalam *paper* tulisan Asma Ali Elbeleze, Kihcman dan Bachok Taib dengan judul *Homotopy Perturbation Method for Fractional Black-Scholes European Option Pricing Equations using Sumudu Transform*, solusi persamaan Black-Scholes Fraksional dicari dengan menggunakan metode pertubasi homotopi. Alat atau perangkat yang untuk mencari solusi yaitu transformasi Sumudu, operator integral fraksional Riemann-Liouville, turunan fraksional Caputo, dan fungsi Mittag-Leffler. Gambaran metode perturbasi adalah sebagai berikut. Berikut ini adalah persamaan diferensial non linear

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega \qquad (3.1)$$

dengan kondisi batas

$$B(u,\frac{\partial u}{\partial n})=0 \qquad r \in \Gamma \qquad (3.2)$$

dengan A operator turunan umum, B operator batas, $f(r)$ fungsi analitik dan Γ adalah batas dari domain Ω. Persamaan difrensial non linear (3.1) dapat dinyatakan:

$L(u) + N(u) - f(r) = 0$ (3.3)

Kemudian dibentuk homotopi $v(r,p)$: $\Omega \times [0,1] \to R$ yang memenuhi

$H(v,p) = (1-p)[L(v) - L(u_0)]+p[A(v) - f(r)] = 0$ dengan $p \in [0,1]$ (3.4)

atau:

$H(v,p)= L(v) - L(u_0)+pL(u_0)+p[N(v) - f(r)] = 0$ (3.5)

dengan $p \in [0,1]$ parameter *embedding* dan u_0 adalah aproksimasi awal dari persamaan (1) yang memenuhi kondisi batas. Berdasarkan (3.4) dan (3.5) diperoleh:

$H(v,0) = L(v) - L(u_0)=0$

$H(v,1) = A(v) - f(r) = 0$

$L(v) - L(u_0)$ dan $A(v) - f(r)$ disebut dengan homotopi.

Asumsikan solusi dari (4) dan (5) dapat diekpresikan sebagai

$v = v_0+pv_1+p^2v_2+\ldots.$

Untuk $p = 1$

$u = \lim_{p\to 1} v = v_0+v_1+\ldots$

Metode untuk mencari solusi persamaan Black-Scholes Fraksional adalah metode perturbasi dan transformasi Sumudu. Hasil adalah solusi persamaan Black-Scholes yang dinyatakan sebagai

$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\sim} p^n u_n(x,t) = Q(x,t) - p(S^{-1}[u^\alpha S[L \sum_{n=0}^{\sim} p^n u_n(x,t) + \sum_{n=0}^{\sim} p^n H_n(u)]])$. dengan H_n polinomial Hesse

$H(u_0,u_1,\ldots u_n)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}[N(\sum_{n=0}^{\sim} p^i u_i)]$, N adalah operator turunan non linier.

3.4 Metode dekomposisi Adomian.

Dalam tulisan Ghandehari dan Ranjbar dengan judul *European Option Pricing Model Black-Scholes Fraksional: Approach via Expansion in Series* (2014), tujuanya adalah mencari solusi persamaan Black-Scholes Fraksional dengan metode dekomposisi Adomian. Alat-alat yang digunakan yaitu operator integral fraksional Riemann-Liouville, turunan fraksional Caputo, dan fungsi Mittag Leffler. Berikut ini adalah ilustrasi dari metode dekomposisi Adomian:

Andaikan persamaan diferensial fraksional non linear dinyatakan sebagai

$D_t^\alpha V(x,t) + R[x]V(x,t) + N[x]V(x,t) = 0 \quad t > 0, x \in R, 0 < \alpha \le 1$ (3.6)

$V(x,0) = g(x)$

dengan $R[x]$ adalah operator linear, $N[x]$ operator linear umum.

Bentuk (6) dapat ditulis sebagai

$D_t^\alpha V(x,t) =-\mathcal{L}[x] * V(x,t)$ (3.7)

dengan $\mathcal{L}[x] = R[x] + N[x]$

Dengan menggunakan hubungan operator Riemann-Liouville dan operator diferensial fraksional Caputo dan dengan menggunakan operator $D_t^{-\alpha}$ akan diperoleh

$V(x,t) = V_0(x,t) + \sum_{k=1}^{\sim} V_k(x,t)$ (3.8)

dengan $V_0(x,t) = g(x)$. Substitusi (3.8) ke (3.7) diperoleh

$V_{n+1}(x,t) = D_t^{-\alpha}(-\mathcal{L}[x] * V_n(x,t))$ (3.9)

3.5 Konvergensi Metode Dekomposisi Adomian.

Berikut ini adalah masalah konvergensi deret dekomposisi. Perhatikan persamaan Black-Scholes fraksional

$V_t^\alpha+ax^2V_{xx}+bxV_x - rV = 0$

$0 < \alpha \le 1$

dengan $a = \frac{\sigma^2}{2}$, $b = r$ dan kondisi awal $V(x,0) = g(x)$.

Dengan menggunakan persamaan (3.6), (3.7) dan (3.8)

$V_0(x,t) = g(x)$

$V_{n+1}(x,t) = ((-\mathcal{L}[x])^n\, g(x))D_t^{-\alpha}(\frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha})$

sehingga

$V(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)} (-1)^k (\mathcal{L}^k[x] * g(x))$

dengan $\mathcal{L}[x]=ax^2 D_{xx}+bxD_x - r$

$V(x,t)=E_\alpha(-t^\propto \mathcal{L}[x]*g(x))$

3.6 Metode dekomposisi Laplace Adomian.

Secara umum persamaan diferensial parsial non linear berorde dua dengan kondisi awal dapat di tuliskan dalam bentuk:

$Lu(x,t) + Ru(x,t) + Nu(x,t) = h(x,t)$,

$u(x,0) = f(x)$,

$u_t(x,0) = g(x)$

dengan

L: operator diferensial order dua

R: operator linear

N: operator diferensial non linear

Kemudian gunakan transformasi Laplace kedua sisi

$\mathcal{L}[Lu(x,t)]+ \mathcal{L}[Ru(x,t)]+ \mathcal{L}[Nu(x,t)]= \mathcal{L}[h(x,t)]$

$s^2\mathcal{L}[u(x,t)]-sf(x) - g(x) + \mathcal{L}[Ru(x,t)]+ \mathcal{L}[Nu(x,t)]= \mathcal{L}[h(x,t)]$

sehingga:

$\mathcal{L}[u(x,t)]=\frac{f(x)}{s}+\frac{g(x)}{s^2} - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[Ru(x,t)]- \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[Nu(x,t)]+ \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[h(x,t)]$

Langkah berikutnya adalah metode dekomposisi Laplace merepresentasikan solusi sebagai deret tak hingga

$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$

Operator non linear dinyatakan sebagai:

$Nu(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x,t)$

dengan

$A_n=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}[N(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i]$

$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}[u_0(x,t)]=\frac{f(x)}{s}+\frac{g(x)}{s^2} - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[Ru(x,t)]- \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x,t)]+ \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[h(x,t)]$

$\mathcal{L}[u_0(x,t)]=k_1(x,s)$

$\mathcal{L}[u_1(x,t)]=k_2(x,s) - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[R_0 u(x,t)]- \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[A_0(x,t)]$

$\mathcal{L}[u_{n+1}(x,t)]=- \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[R_n u(x,t)]- \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[A_n(x,t)]$

Kemudian diambil invers Laplace-nya diperoleh:

$u_0(x,t)=k_1(x,t)$

$u_1(x,t)=k_2(x,s) - \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2} [R_0 u(x,t)]- \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[A_0(x,t)]$

$u_{n+1}(x,t) = - \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2} [R_n u(x,t)]- \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[A_n(x,t)]$

$u(x,t) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} u_n(x,t)$

3.7 **Konvergensi Analisis Metode Adomian-Laplace**

Diberikan ruang Hilbert H yang didefinisikan sebagai berikut:

$H = L^2(\alpha,\beta)\mathrm{x}[0,T]$ dan $u:(\alpha,\beta)x[0,T] \to R$

dengan

$\int_{(\alpha,\beta)x[0,T]} u^2(x,s)dsd\tau < \infty$

Metode Adomian-Laplace yang dimodivikasi konvergen bila memenuhi dua sifat berikut:

(H1) $< L(u) - L(v), u - v >\geq k\|u - v\|^2$; $k > 0$, untuk setiap $u,v \in H$

(H2) Untuk setiap $M > 0$ terdapat konstan $C(M) > 0$ sedemikian untuk setiap $u,v \in H$ dengan $\|u\| \leq M$, $\|v\| \leq M$ diperoleh $< L(u) - L(v), u - v >\leq C(M)$ $\|u - v\|\|w\|$ untuk setiap $w \in$ H

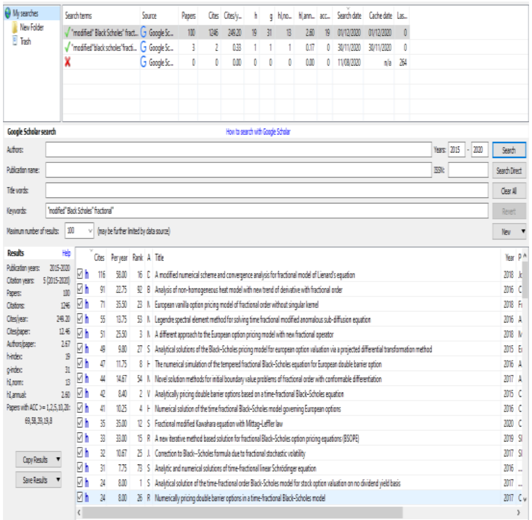
3.8 **Kebaruan penelitian dengan topik persamaan Black-Scholes Fraksional**

Untuk melihat kebaruan penelitian mengenai topik persamaan Black-Schole Fraksional terkait usulan riset digunakan kata kunci "*modified*" Black-Scholes"*fractional*" pada *publish* and *ferish*. Pencarian dibatasi untuk paper yang terbit pada rentang tahun 2015-2020 sebanyak 100 paper. Dari hasil yang diperoleh, terdapat bahwa topik yang telah dibahas adalah pencarian solusi persamaan Black-Scholes fraksional dengan menggunakan metode transformasi sumudu, homotopi dan secara numerik yaitu dengan finit diference method. Sebagian besar yang dibahas adalah mengenai solusi persamaan Black-Scholes atau tentang terapan persamaan Black-Scholes berkaitan dengan masalah option pricing. Berdasarkan hasil yang diperoleh dengan menggunakan *publish and ferish* seperti yang ditampilkan di Tabel 2.1,Tabel 2.2, Tabel 2.3, dan Tabel 2.4, dapat dilihat bahwa belum ada yang membahas tentang topik analisis persamaan Black-Scholes fraksional yang dimodifikasi.

Hasil di atas kemudian diolah dengan menggunakan *VOS Viewer* untuk melihat pemetaan topik pada artikel-artikel tersebut. Ilustrasi hasil pemetaan topik menggunakan *VOS Viewer* terkait persamaan Black-Scholes fraksional yang dimodifikasi ditunjukkan pada Gambar 2.1. Berdasrkan hasil tersebut dapat dilihat bahwa penelitian yang berkaitan dengan persamaan Black Scholes Fraksional biasanya terkait dengan pemodelan masalah opsi, metode untuk mencari solusi persamaan Black Scholes fraksional. Sementara itu juga dapat dilihat bahwa penelitian tentang pemodelan opsi Eropa dengan menggunakan kalkulus fraksional belum begitu banyak.

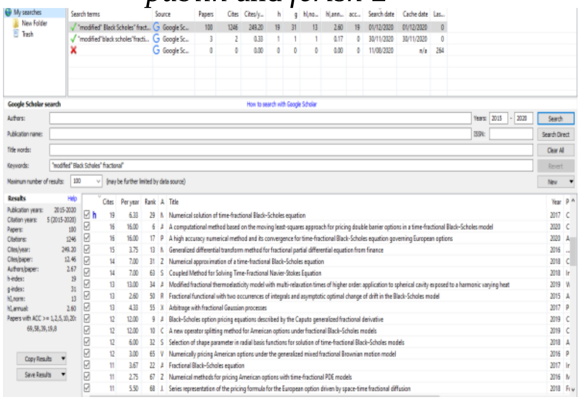
Berdasarkan pada plot warna pada Gambar 2.3 penelitian tentang model gerak Brown, model persamaan Black-Scholes fraksional , model persamaan Black-Scholes fraksional waktu, model opsi Eropa dengan menggunakan kalkulus fraksional bisa dikatakan belum banyak (sedikit). Hal ini bisa dilihat dari warna yang melingkupi topik-topik tersebut yang berwarna hijau muda tipis.

Tabel 3.1. Pencarian topik riset dengan *publih and ferish* 1



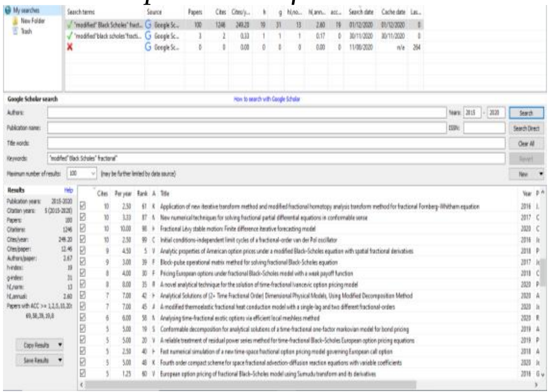
Berdasarkan Tabel 3.1, dapat dilihat bahwa sebagian besar judul paper yang diperoleh adalah mengenai solusi persamaan Black-Scholes baik secara analitik dan numeric. Secara analitik dengan menggunakan metode transformasi diferensial, sedangkan secara numeric dengan menggunakan metode Kernel singular, metode *element* Legendre. Jelas bahwa untuk topic mengenai persamaan Black-Scholes fraksional yang dimodifikasi tidak terdapat pada Tabel 2.1.

Tabel 3.2. Pencarian topik riset dengan *publih* and *ferish* 2



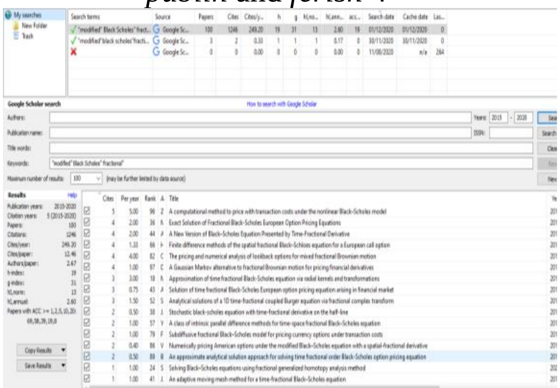
Berdasarkan Tabel 3.2, diperoleh bahwa sebagian besar membahas solusi numeric dari model Black-Scholes fraksional maupun solusi persamaan diferensial fraksional waktu. Terdapat pula solusi analitik dari persamaan diferensial fraksional. Sedangkan topic mengenai persamaan Black-Scholes fraksional yang dimodifikasi tidak terdapat pada Tabel 3.2.

Tabel 3.3. Pencarian topik riset dengan *publih and ferish* 3



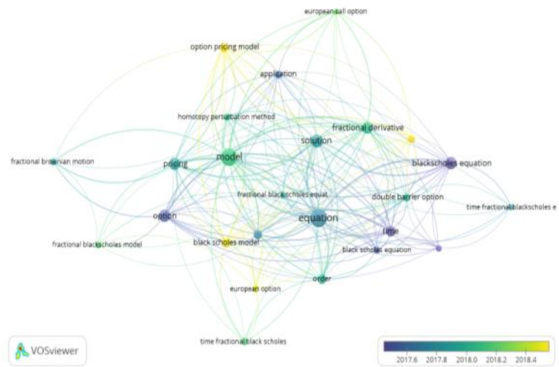
Berdasarkan Tabel 3.3, diperoleh bahwa terdapat teknik numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial fraksional, metode matriks operasional *Block Pulse* untuk menyelesaikan persamaan Black-Scholes fraksional, beserta metode transformasi Sumudu untuk meyelesaikan persamaan Black-Scholes fraksional. Topik persamaan Black-Scholes Fraksional yang dimodifikasi tidak terdapat dalam Tabel 2.3.

Tabel 3.4 Pencarian topik riset dengan *publih* and *ferish* 4



Berdasarkan Tabel 3.4 diperoleh bahwa terdapat paper solusi eksak dari persamaan Black-Scholes untuk masalah opsi Eropa, metode finit diference untuk persamaan Black-Scholes Fraksional dari opsi call tipe Eropa,solusi analitik persamaan Burger fraksional waktu via transformasi komplek fraksional, solusi numerik persamaan Black-Scholes dengan menggunakan turunan fraksional spasial. Nampak bahwa topik analisis persamaan Black-Scholes fraksional yang dimodifikasi tidak ada pada Tabel 3.4.

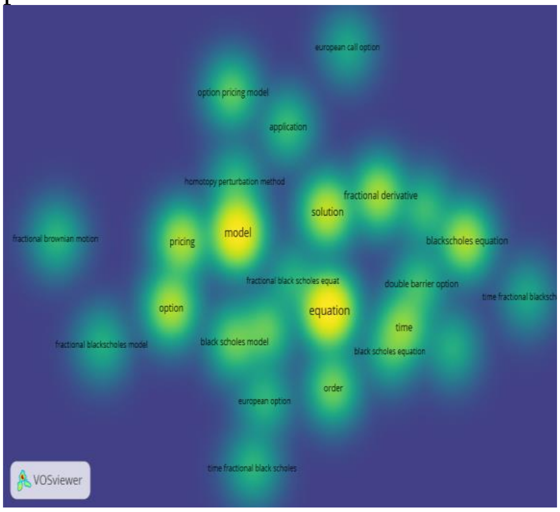
Berdasarkan hasil dari *publish and ferish* yang sudah diperoleh pada Tabel 3.1,Tabel 3.2, Tabel 3.3 dan Tabel 3.4, menggunakan *VOS Viewer* dapat diperoleh pemetaan penelitan yang dinyatakan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1. Hasil pemetaan topik penelitian

Berdasarkan Gambar 2.1, diperoleh bahwa topik yang banyak diteliti adalah persamaan Black-Scholes, hal ini ditandai dengan bulatan yang cukup besar dibandingkan dengan yang lainnya. Penelitian mengenai persamaan Black-Scholes dilakukan pada tahun 2017 yang ditandai oleh bulatan besar berwarna biru, sedangkan untuk penelitian mengenai solusi persamaan Black-Scholes fraksional masih belum begitu banyak dilakukan. Hal ini dapat dilihat dengan bulatan yang tidak begitu besar dan berwarna hijau. Sedangkan yang belum banyak diteliti dan termasuk baru adalah topic mengenai persamaan Black-Scholes fraksional terkait dengan masalah opsi. Berdasarkan Gambar 2.1, dapat dilihat bahwa topic mengenai analisis persamaan Black-Scholes fraksional yang dimodifikasi belum diteliti.

Berdasarkan dari *VOS Viewer* kemudian digambarkan plot warna topik-topik penelitian yang hasilnya dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Berdasarkan Gambar 2.2, diperoleh bahwa gambar yang berwqarna kuning terang menunjukkan bahwa penelitian mengenai persamaan Black-Scholes telah banyak dilakukan. Sedangkan topik mengenai model persamaan Black-Scholes fraksional beserta solusinya masih sedikit dilakukan. Hal ini dapat dilihat dari warna hijau muda yang masih samar samar. Demikian pula topik mengenai aplikasinya. Dapat dilihat bahwa topik mengenai analisi persamaan Black-Scholes fraksional yang dimodifikasi belum ada pada Gambar 2.2, Sehingga penelitian mengenai topic analisis persamaan Black-Scholes fraksional yang dimodifikasi masih terbuka untuk dilakukan.

SIMPULAN DAN SARAN

Adapun solusi dari persamaan Black-Scholes Fraksional adalah $(x,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\frac{\tau^{nq}}{\Gamma(qn+1)}$ yang merupkan deret tak hingga fungsi Mittag-Lefler. Masih banyak yang bisa dikerjakan untuk materi penelitian lebih lanjut misalkan mengenai masalah eksisitensi dan ketunggalan solusi dari persamaan Black-Scholes Fraksional, mencari opsi *call* dan *put* dan arti dari orde persamaan Black-Scholes dalam masalah ekonomi dan matematka keuangan. Bisa juga diteliti untuk analisis persamaan Black-Scholes Fraksional yang dimodifikasi.

DAFTAR PUSTAKA

Ahmed & Abdusalam, (2004), On Modified Black-Scholes Equation, *Chaos, Solutions and Fractals, Volume* 22, *Number 8,* 583-587.

Aguilar J.P & Korbel J.,(2017), Option Priccing Model Driven by the space time fractional Diffusion, *Series Representation and Aplication Volume 20,Number 8,* 1-15

Batogna, R.G., (2018), *Analysis of Option Pricing Within The Scope Of Fractional* Calculus, Afrika Selatan: *Departement of Mathematics and Applied Mathematics Faculty of Natural and Agricultural Science at the University of the Free State*.

Belgacem & Karaballi, (2005), Sumudu Transform Fundamental Properties Investigation and Aplications, *Hindawi Publisjing Corporation Journal of Applied Mathematics and Stocahstic Analysis,Volume* 2006, *Number* 10,Article ID 9108, 1-23.

Elbeleze, A.A., Kihcman, & Taib, B.M., (2013), Homotopy Perturbation Method for Fractional Black-Scholes European Oprion Pricing Equations Using Sumudu Transform, *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering Volume* 2013 *Number* 10, Article ID 524852, 1-7.

Eltayeb, H., & Kihcman, A., (2010), A Note On the Sumudu Transform and Differential Equations, *Applied Mathematical Sciences, Volume* 4, *Number* 22, 1089-1098.

Febrianti, W., (2018), Penentuan Harga Opsi Dengan Model Black-Scholes Menggunakan Metode Beda Hingga

Forward the Central Space, *Journal Of Fundamental Mathematics and Applications, Volume* I, *Number I,* 45-61.

Ghaedahari & Ranjbar, (2014), European Option Pricing of Fractional Version of the Black-Scholes Model Aproach Via Expansion in Series, *International Journal of Non Linear Science, Volume* 17, *Number* 2, 105-110.

Gupta & Jain, (1986), *Lebesgue Measure And Integration*, Canada: Wiley Eastern Limited.

Kaya, F., & Yilmas, Y., (2019), Basic Properties of Sumudu Transformation and Its Application to Some Partial Differential Equations, *Sakarya University Journal of Science, Volume* 23, *Number* 4, 509-514.

Khaeruddin & Massalesse, (2008), Penentuan Harga Opsi Eropa Menggunakan Persamaan Black-Scholes, *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi,Volum* 4 ,*Number* 2, 104-116.

Khan, A.W., (2016), European Pricing of Fractional Black-Scholes Model Using Sumudu Transform and its Derivatives (General Letters In Mathematics), *General Letters In Mathematics, Volume* 1, *Number* 3, Desember 2016, 74-80.

Khan, A.W., & Ansari, F.A., (2016*)*, European Option Pricing of Fractional Black-Scholes Model Using Sumudu Transform and is Derivative, *General Latters in Mathematics, Volume* 1, *Number* 3 December 2016, 74-80.

Khan, Y., and Qingbiao, W.U., (2011), Homotopy Perturbation Transform Method for Nonlinear Equation using He's Polynomials,*Computers and Mathematics with Applications, Volume 61, Number 10*, *1963-1967*.

Kanth, A.S.V.R., & Aruna, K., (2016), Solution of Time fractional Black-Scholes European option pricing equation arising in financial market, *Non Linear Engineering,Volume* 5, *Number* 4, 269-176.

Kreyszeig, E., (1978), *Introductory Functional Analysis With Applications*, Canada: John Wiley and Sons.

Kumar, A., Yildirin & Khan, (2012), Analitical solution of fractional Black-Scholes European Option Pricing Equation by Using Laplace Transform, *Journal of Fractional Calculus and Applications, Volume 2 Number 8,* 1-9.

Lasota, A., & Mackey, (1994), *Chaos, Fractals, and Noise : Stochastic Aspect Of Dynamic*, Applied Mathematical Science, Vol. 97, Berlin: Springer-Verlag.

Mathai, H,J., & Haubold, H.J., (2017), *An Introduction to Fractional Calculus*, New York: Nova Science Publisher Inc.

Mishra, R., Aggarwal, Chaundari, L., & Kumar, A., (2020), Relationship Between Sumudu and Some Efficient Integral Transform, *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering (IJITEE),Volume 9,Number 3,* 153-159.

Mohebbi, M.A., & Ranjbar, M., (2014), European Option Pricing of Fractional Black-Scholes Model with New Lagrange Multipliers, *Computational Methods for Diffrenetial Equations*,Volume 7,,Number 2, ,hal 171-178.

Naghipour, A., & Manafian, J., (2015), Application of the Laplace Adomian Decomposition and Implicit Methods for Solfing Burger's equation, *Journal Pure Appl Math Volume.6.Number.1*, 68-77.

Omer, E.M., (2017) , Double Laplace Transform and Double Sumudu Transform , *American Journal of Engineering Research, Volume 6, Issue* 5, 312-317.

Ozkan, O., & Kurt, A., (2019), A New Method for Solving Fractional Partial Differential Equation, *The Journal of Analysis,* Volume 87, Number 12, 2786-2797,

Pinsky, A., (1998), *Partial Differetnyial Equations and Boundary Value Problem With Applications*, New York: MC Graw-Hill.

Ranjbar & Ghandehari, (2015), Barrier Options Pricing of Fractional Version of the Black-Scholes Model, *International Journal Industrial Mathematics, Volume* 7, *Number* 2, Article ID IJIM, 105-110.

Royden, H.L., (1989), *Real Analysis Third Edition*, New York: Macmillan Publishing.

Sefira, Rusyaman, E., & Sukono, *(2019)*, Methods to Solve Fractional Black-Scholes, *Proceedings of the International Conference om Industrial Engineering and Opertions Management Pilsen,Czech Republic*, July 23-26, 2019.

Siswanto, Purnomo, D.K., & Kusbidono, (2014), Penentuan Harga Opsi Model Black-Scholes Menggunakan Metode Beda Hingga Dufort-Frankel, *Prosiding Seminar Nasional Matematika Universitas Jember*, 329-334.

Sumiati, I., Rusyaman, E., & Sukono, (2019), Black-Scholes Equation Solution Using Laplace -Adomian Decomposition Method, *IAENG International Journal Of Computer Science*, *Volume* 6, *Number* 4, IJCS_46_4_2, 1-6.

Taib, Kichman. A., & Elbelese, (2013), Homotopy Perturbation Method for Fractional Black-Scholes European Option Pricing Equations Using Sumudu Transform, *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problem in Engineering, Volume 2013*, Aricle id 524852, 7 pages, 1-7.

Uddin, M., & Taufiq, M., (2019), Approximation of Time Fractional Black-Scholes Equation Via Radial, Kernels and Transformation, *Fractional Difrential Calculus, Volume* 9, *Number* 1 , 75-90.

Yavuz, M., & Ozdemir, N., (2018), A Quantitative Approach to Fractional Option Pricing Problems with Docompotition Series, *Konuralp journal of Mathematics*, *Volume* 6, *Number* 1, 102-109.

Walters, P., (1982), *An Introduction to Ergodic Theory*, New York: Springer-Verlag.