

REVIEW PERSAMAAN BLACK-SCHOLES FRAKSIONAL DIMODIFIKASI

Agus Sugandha

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman

Email: agus.sugandha@unsoed.ac.id

Abstrak: Review Persamaan Black-Scholes Fraksional Dimodifikasi. Paper ini akan dibahas solusi dari persamaan Black-Scholes fraksional yang merupakan bentuk umum dari persamaan Black-Scholes dan kebaruan penelitian tentang persamaan Black-Scholes yang dimodifikasi. Adapun metode-metode untuk mencari solusi dari persamaan Black Scholes Fraksional sudah banyak ditulis dalam banyak jurnal internasional. Solusi persamaan Black Scholes fraksional dalam hal ini ditinjau dengan pendekatan Kalkulus Fraksional. Dengan pendekatan Kalkulus Fraksional proses penyelesaian dalam mencari solusi persamaan Black Scholes Fraksional menjadi lebih efisien. Beberapa Metode yang digunakan untuk mencari solusi Persamaan Black Scholes Fraksional diantaranya adalah metode transformasi Sumudu, metode ekspansi deret, metode perturbasi Homotopi, metode dekomposisi Adomian, dan metode dekomposisi Laplace Adomian.

Kata kunci: dekomposisi Adomian, dekomposisi Laplace-Adomian, ekspansi deret, Kalkulus Fraksional, persamaan Black-Scholes Fraksional, perturbasi homotopi, solusi, transformasi Sumudu.

Abstract: Review The Modified Fractional Black-Scholes Equation. This paper will discuss the solution of the fractional Black-Scholes equation which is a general form of the Black-Scholes equation and the novelty of research on the modified Black-Scholes equation. The methods for finding solutions to the fractional Black Scholes equation have been written in many international journals. The solution to the fractional Black Scholes equation in this case is reviewed by the Fractional Calculus approach. With the Fractional Calculus approach, the solution process in finding solutions to the Fractional Black Scholes equation becomes more efficient. Some of the methods used to find solutions to the Fractional Black Scholes Equation include the Sumudu transformation method, the series expansion method, the Homotopy perturbation method, the Adomian decomposition method, and the Laplace Adomian decomposition method.

Keywords: Adomian decomposition, Laplace-Adomian decomposition, series expansion, Fractional Calculus, Fractional Black-Scholes equation, homotopy perturbation, solutions, Sumudu transformation.

PENDAHULUAN

Dalam perkembangan ilmu Matematika khususnya persamaan diferensial parsial, sekarang ini ditemukan banyak sekali aplikasinya dalam bidang-bidang ilmu lain. Misalnya pada masalah penyebaran penyakit, mekanika fluida, dan masalah gelombang. Tentu saja ilmu dasar yang digunakan dalam persamaan diferensial parsial adalah kalkulus.

Sementara itu, kalkulus fraksional lahir pada tahun 1695. Kalkulus fraksional dimulai ketika l'Hopital, salah satu *founders* kalkulus, menulis surat kepada Leibnitz yang

merupakan Bapak Kalkulus, arti dari $\frac{d^n y}{dx^n}$ untuk $n = \frac{1}{2}$. Kemudian Leibnitz menjawab bahwa hal tersebut merupakan sebuah paradoks yang suatu saat nanti akan sangat berguna. Kemudian, selama tiga dekade terakhir materi tentang kalkulus fraksional menemukan aplikasi dalam banyak masalah di berbagai disiplin ilmu seperti aliran fluida, difusi, anomaly difusi, reaksi difusi turbulensi, jaringan listrik, fisika, kimia, gelombang, teori distribusi statistik dan matematika keuangan.

Dalam matematika keuangan salah satu aplikasinya yaitu masalah investasi. Tujuan dari investasi ini adalah untuk memperoleh keuntungan dalam pasar keuangan. Dalam hal ini, investor mempunyai dua pilihan, yaitu pilihan untuk membeli aset yang diperdagangkan di dalam pasar keuangan atau menjual aset dengan tujuan untuk memperoleh keuntungan. Dalam ilmu ekonomi, hal ini disebut dengan masalah opsi.

Opsi adalah suatu jenis kontrak antara dua belah pihak, dimana satu pihak memberikan hak kepada pihak lain untuk menjual atau membeli aset tertentu pada harga dan periode tertentu. Berdasarkan jenis hak yang diberikan, opsi dapat dibedakan menjadi dua yaitu opsi *call* dan opsi *put*. Opsi *call* adalah suatu tipe kontrak yang memberikan hak kepada pemegang opsi untuk membeli dari penjual opsi sejumlah saham tertentu pada harga dan jangka waktu tertentu. Opsi *put* merupakan opsi yang memberikan hak kepada pemegangnya untuk menjual saham dalam jumlah tertentu kepada pembeli opsi pada waktu atau harga yang telah ditentukan. Sedangkan berdasarkan periode waktu penggunaan, opsi dapat dibedakan menjadi dua yaitu opsi tipe Eropa dan opsi tipe Amerika. Tipe Eropa menunjukkan bahwa opsi tersebut dapat dilaksanakan pada saat jatuh tempo saja. Sedangkan tipe Amerika menunjukkan bahwa opsi tersebut dapat dilaksanakan pada saat jatuh tempo atau sebelumnya.

Fisher Black dan Miron Scholes pada tahun 1973 merumuskan suatu metode untuk menetapkan harga opsi. Metode tersebut sekarang dikenal dengan metode Black-Scholes. Dalam perkembangannya, metode Black-Scholes yang digunakan untuk menentukan harga opsi tidak hanya menjadi permasalahan dalam bidang matematika keuangan dan ekonomi saja, tetapi sudah berkembang juga untuk bidang matematika. Hal ini sangat wajar, karena persamaan Black-Scholes menggunakan Persamaan

Diferensial Parsial. Dalam hal ini untuk mencari solusi dari persamaan Diferensial Parsial bukanlah suatu pekerjaan yang mudah di dalam bidang Matematika. Untuk mencari solusi dari persamaan Black-Scholes dapat menggunakan teori integral Ito, transformasi Fourier atau secara numerik dengan menggunakan metode Beda Hingga. Dari solusi yang diperoleh tersebut, kemudahan dapat ditentukan formula opsi *put* dan opsi *call*-nya.

Dari persamaan Black-Scholes tersebut dikembangkan oleh ahli matematika menjadi persamaan Black-Scholes Fraksional. Sehingga dalam hal ini persamaan Black-Scholes merupakan kasus khusus dari persamaan Black-Scholes Fraksional. Adapun beberapa metode untuk mencari solusi persamaan Black Scholes Fraksional adalah transformasi Sumudu, Metode Perturbasi Homotopi, Metode dekomposisi Adomian, Metode dekomposisi Adomian Laplace, dan Metode transformasi Diferensial. Taib, Kichman & Elbelese (2013) menggunakan kombinasi metode perturbasi *homotopy*, metode transformasi Sumudu dan polinomial He's untuk menentukan solusi persamaan Black-Scholes Fraksional. Kemudian Ghaedahari (2015) menggunakan metode dekomposisi deret beserta analisisnya untuk mencari solusi dari persamaan Black-Scholes Fractional. Sedangkan Khan (2016) menentukan solusi dari persamaan Black-Scholes Fraksional dengan menggunakan transformasi Sumudu dan sifat-sifat turunan dan integral Fraksional. Selanjtnya, pada tahun 2018, Yavus dan Necati menyelesaikan persamaan Black-Scholes Fraksional dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian. Tahun berikutnya, Kaya & Yilmaz menyelesaikan berhasil Persamaan Diferensial Parsial dengan menggunakan sifat sifat transformasi Sumudu. Masih pada tahun yang sama yaitu 2019, Uddin and Taufiq menggunakan metode transformasi Laplace dikombinasikan dengan metode kernel radial untuk menentukan solusi dari

persamaan Black-Scholes Fraksional. Dari beberapa penelitian tersebut, solusi analitik dari persamaan Black-Scholes Fraksional merupakan dalam bentuk deret tak hingga fungsi Mittag Lefler.

Sementara itu untuk masalah eksistensi dan ketunggalan solusi dari persamaan Black-Scholes Fraksional ditulis oleh Batogna pada tahun 2018. Beberapa alat (*tools*) yang digunakan untuk membahas masalah eksistensi dan ketunggalan tersebut diantaranya dengan teorema Picard Lindelof, teorema titik tetap Banach, dan teorema Arzella Ascoli. Selain itu juga dibahas mengenai solusi numerik dari persamaan Black-Scholes Fraksional secara numerik dengan menggunakan metode Crank-Nickholson.

KAJIAN LITERATUR

Kajian mengenai persamaan Black-Scholes fraksional sangat penting dilakukan, karena dari hasil kajian tersebut dapat dicari solusi dan formula untuk opsi *call* dan opsi *put*. Meski demikian mayoritas dari penelitian yang dilakukan, masih terbatas mencari solusi. Sehingga penelitian untuk mencari formula opsi *call* dan opsi *put* dari persamaan Black-Scholes fraksional masih sangat terbuka. Bila formula opsi *call* dan *put* dapat diperoleh maka dapat dianalisa kapan sebaiknya membeli asset atau menahan dulu atau menjual asset, dengan tujuan untuk memperoleh keuntungan. Sehingga berdasarkan hal diatas maka formula opsi *call* dan *put* dari persamaan Black-Scholes fraksional dapat digunakan untuk pengambilan keputusan oleh investor.

Penelitian yang akan dilakukan diawali dengan persamaan difusi telegraph. Kemudian berdasarkan persamaan difusi telegraph dapat dikembangkan menjadi persamaan Black-Scholes. Karena persamaan Black-Scholes merupakan kejadian khusus dari persamaan difusi, sehingga dari persamaan Black-Scholes dibentuk persamaan Black-Scholes

fraksional. Berdasarkan persamaan Black-Scholes fraksional dapat dibentuk menjadi persamaan Black-Scholes Fraksional yang dimodifikasi. Penelitian mengenai persamaan Black-Scholes Fraksional yang dimodifikasi belum diteliti dan dibahas, sehingga merupakan materi yang menarik untuk diteliti lebih jauh.

Persamaan Black-Scholes dengan nilai opsi dinyatakan sebagai

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{\sigma x^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + r(\tau)x \frac{\partial \psi}{\partial x} - r(\tau)\psi = 0; \quad (x, \tau) \in \mathbb{R}^+ \times (0, T) \quad (2.1)$$

dengan $\psi(x, \tau)$ nilai opsi Eropa pada saat harga aset adalah x dan pada waktu τ , sedangkan T adalah *maturity*, $r(\tau)$ bunga bebas resiko dan $\sigma(x, r)$ menunjukkan fungsi volalitas dari aset dasar (*underlying asset*) (Ghaedahari & Ranjbar, 2015). Fungsi *payoff* dinyatakan sebagai $\psi_c(x, \tau) = \max(x - E, 0)$, $\psi_p(x, \tau) = \max(E - x, 0)$, dimana ψ_c dan ψ_p harga dari opsi *call* dan opsi *put* Eropa, sedangkan E adalah *exercise price* untuk opsi (Khan & Ansari, 2016).

Menggunakan transformasi $(x, \tau) = Eu(S, \tau)$, $S = Ee^x$, $t = T - 2\sigma^2$, $k = 2r/\sigma^2$ diperoleh:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + (k - 1) \frac{\partial u}{\partial S} - ku \quad (2.2)$$

dengan $u(0, \tau) = 0$, $u(S, \tau) \approx \tau$ untuk $S \rightarrow \infty$ dan $u(S, 0) = e^x - 1$, $x \geq 0$

Sedangkan persamaan Black-Scholes fraksional adalah persamaan berbentuk

$$\frac{\partial^q \psi}{\partial \tau^q} + \frac{\sigma x^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + r(\tau)x \frac{\partial \psi}{\partial x} - r(\sigma)\psi = 0 \quad (2.3)$$

dengan $(x, \tau) \in \mathbb{R}^+ \times (0, T)$, $0 < q \leq 1$ (Khan & Ansari, 2016). Arti symbol symbol yang ada didalam persamaan Black-Scholes fraksional adalah sama sama seperti pada persamaan Black-Scholes. Perbedaanya

terletak pada orde turunan parsial ψ terhadap τ pada persamaan Black-Scholes adalah satu, sedangkan pada persamaan Black Scholes fraksional adalah q dengan $0 < q \leq 1$.

METODE PENELITIAN

Metodologi penelitian pada tulisan ini adalah *literature review*. Pustaka dihimpun dari artike-artikel pada berbagai jurnal yang membahas solusi persamaan Black-Scholes Fraksional. Selanjutnya, dilakukan penulisan kembali langkah-langkah untuk mendapatkan solusinya. Kemudian berdasarkan persamaan Black-Scholes Fraksional sangat memungkinkan sekali untuk dibentuk persamaan Black-Scholes Fraksional Dimodifikasi. Akan diperlihatkan bahwa persamaan Black-Scholes Fraksional merupakan kebaruan dalam penelitian yang sangat terbuka untuk diungkap lebih jauh. Demikian juga untuk masalah opsi call dan put dari persamaan Black-Scholes Fraksional Dimodifikasi juga sangat terbuka untuk diteliti.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Persamaan Black Scholes Fraksional

Model Persamaan Black-Scholes dengan nilai opsi di dinyatakan sebagai

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{\sigma x^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + r(\tau)x \frac{\partial \psi}{\partial x} - r(\tau)\psi = 0$$

$$(x, \tau) \in R^+ \times (0, T)$$

dengan $\psi(x, \tau)$ nilai opsi Eropa pada saat harga aset x pada waktu τ sedangkan T adalah *maturity*, $r(\tau)$ bunga bebas resiko dan $\sigma(x, r)$ menunjukkan fungsi volalitas dari *underlying asset* (aset dasar). Fungsi Payoff dinyatakan sebagai

$$\psi_c(x, \tau) = \max(x - E, 0), \quad \psi_p(x, \tau) = \max(E - x, 0),$$

dengan ψ_c dan ψ_p harga dari *European Call* dan opsi put, sedangkan E adalah *exercise price* untuk opsi. Sedangkan persamaan Black-Scholes Fraksional adalah persamaan

$$\frac{\partial^q \psi}{\partial \tau^q} + \frac{\sigma x^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + r(\tau)x \frac{\partial \psi}{\partial x} - r(\tau)\psi = 0$$

dengan $(x, \tau) \in R^+ \times (0, T)$, $0 < q \leq 1$
 Berikut ini adalah beberapa metode untuk menyelesaikan persamaan Black-Scholes Fraksional:

3.2 Metode Transformasi Sumudu.

Dalam *paper* dari Waseem Asghar Khan dan Faryal Aijas Ansari dengan judul *European Option Pricing of Fractional Black-Scholes Model using Sumudu Transform and Its Derivatives*, pencarian solusi dari persamaan persamaan Black-Scholes Fraksional dilakukan dengan menggunakan metode transformasi Sumudu fraksional. *Transformasi Sumudu* adalah himpunan fungsi

$$A = \{\psi(\tau)\} / \exists M, t_1, t_2 > 0,$$

$$|\psi(\tau)| < M e^{\tau/t_j}, \text{ jika } \tau \in (-1)^j \times [0, \sim]$$

dengan menggunakan rumus

$$F(u) = S[\psi(\tau)] = \int_0^{\sim} \frac{1}{u} e^{-\tau/u} \psi(\tau) d\tau$$

Alat untuk mencari solusi persamaan Black-Scholes Fraksional menggunakan definisi dan teorema berikut. Operator integral fraksional Riemann-Liouville dari *order* q dari fungsi $\mu(x) \in K_\omega$ dengan $\omega \geq -1$ diberikan sebagai berikut:

$$J^q \psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x (x - \tau)^{q-1} \psi(\tau) d\tau, & q > 0, x > 0 \\ \psi(x), & q = 0 \end{cases}$$

Operator J^q memiliki sifat sifat berikut:

- $J^0 \psi(x) = \psi(x)$
- $J^q J^\tau \psi(x) = J^{q+\tau} \psi(x)$
- $J^q J^\tau \psi(x) = J^\tau J^q \psi(x)$
- $J^q x^\zeta = \frac{\Gamma(\zeta+1)}{\Gamma(q+\zeta+1)} x^{q+\zeta}$
- $J^q C = \frac{C}{\Gamma(q+1)} x^q$

Definisi 1:

Turunan Fraksional Caputo D^q fungsi $\psi(x)$ dari bilangan real q seemikian sehingga

$$m - 1 < q \leq m, m \in N, \text{ untuk } x > 0$$

dan $\psi \in C_{-1}^m$ sebagai

$$D^q \psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-q)} \int_0^x (x-\tau)^{m-q-1} \psi^{(m)}(\tau) d\tau \\ \frac{\partial^m \psi(x)}{\partial x^m} \quad q = m \end{cases}$$

Definisi 2:

Transformasi Sumudu $S[\psi(\tau)]$ dari integral fraksional Riemann-Liouville diberikan oleh:

$$S[J^q \psi(\tau)] = u^q S[\psi(\tau)]$$

Definisi 3:

Transformasi sumudu $S[\psi(\tau)]$ dari turunan fraksional Caputo diberikan oleh

$$S[D^q \psi(\tau)] = u^{-q} S[\psi(\tau)] - \sum_{k=0}^{m-1} u^{-q+k} \psi^{(k)}(0), \quad m-1 < q \leq m$$

dan invers transformasi sumudu diberikan oleh :

$$S^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m-1} u^k \psi^{(k)}(0)\right) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\tau^k \psi^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)}$$

Metode untuk mencari solusi persamaan Black-Scholes fraksional dengan menggunakan metode transformasi sumudu fraksional. Hasilnya penyelesaian/solusi dari persamaan Black-Scholes Fraksional dalam bentuk

$$\psi(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{\tau^{nq}}{\Gamma(qn+1)}$$

3.3 Metode Ekspansi Deret.

Andaikan persamaan diferensial fraksional

$$D_\tau^q \psi(x, \tau) + L[\psi(x, \tau)] + N[\psi(x, \tau)] = Q(x, \tau) \quad ; \quad \tau > 0, m-1 < q \leq m$$

dengan kondisi awal $\psi(x, 0) = f_0(x)$ dan L adalah operator diferensial linier, N adalah operator diferensial non linier

$$S[D_\tau^q \psi(x, \tau)] + S[L[\psi(x, \tau)]] + N[\psi(x, \tau)] = S[Q(x, \tau)].$$

Dengan menggunakan sifat transformasi Sumudu, diperoleh:

$$S[\psi(x, \tau)] = \psi(x, 0) + u^q S[Q(x, \tau)] - L[\psi(x, \tau)] - N[\psi(x, \tau)].$$

Selanjutnya, dengan menggunakan invers Sumudu, diperoleh solusi dari persamaan Black Scholes Fraksional:

$$\psi(x, \tau) = \psi(x, 0) + S^{-1} [u^q S[Q(x, \tau)] - L[\psi(x, \tau)] - N[\psi(x, \tau)]]$$

$$\psi(x, \tau) = \psi(x, 0) + J_\tau^q [Q(x, \tau)] - L[\psi(x, \tau)] - N[\psi(x, \tau)]$$

dengan

$$\begin{aligned} \psi_0(x, \tau) &= \psi(x, 0) = f_0(x) \\ \psi_{n+1}(x, \tau) &= J_\tau^q (Q(x, \tau)) - J_\tau^q (L[\psi_n(x, \tau)] - J_\tau^q (N[\psi_n(x, \tau)])) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \frac{\tau^{nq}}{\Gamma(qn+1)} \\ \psi(x, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{\tau^{nq}}{\Gamma(qn+1)} \end{aligned}$$

3.3 Metode Perturbasi Homotopi.

Dalam *paper* tulisan Asma Ali Elbeze, Kihcman dan Bachok Taib dengan judul *Homotopy Perturbation Method for Fractional Black-Scholes European Option Pricing Equations using Sumudu Transform*, solusi persamaan Black-Scholes Fraksional dicari dengan menggunakan metode pertubasi homotopi. Alat atau perangkat yang untuk mencari solusi yaitu transformasi Sumudu, operator integral fraksional Riemann-Liouville, turunan fraksional Caputo, dan fungsi Mittag-Leffler. Gambaran metode perturbasi adalah sebagai berikut. Berikut ini adalah persamaan diferensial non linear

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega$$

$$(3.1)$$

dengan kondisi batas

$$B(u, \frac{\partial u}{\partial n}) = 0 \quad r \in \Gamma$$

$$(3.2)$$

dengan A operator turunan umum, B operator batas, $f(r)$ fungsi analitik dan Γ adalah batas dari domain Ω . Persamaan diferensial non linear (3.1) dapat dinyatakan:

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0$$

(3.3)

Kemudian dibentuk homotopi $v(r, p): \Omega \times [0,1] \rightarrow R$ yang memenuhi

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0 \quad \text{dengan } p \in [0,1] \quad (3.4)$$

atau:

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0 \quad (3.5)$$

dengan $p \in [0,1]$ parameter *embedding* dan u_0 adalah aproksimasi awal dari persamaan (1) yang memenuhi kondisi batas. Berdasarkan (3.4) dan (3.5) diperoleh:

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0$$

$$H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0$$

$$L(v) - L(u_0) \quad \text{dan} \quad A(v) - f(r)$$

disebut dengan homotopi.

Asumsikan solusi dari (4) dan (5) dapat diekspresikan sebagai

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots$$

Untuk $p = 1$

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + \dots$$

Metode untuk mencari solusi persamaan Black-Scholes Fraksional adalah metode perturbasi dan transformasi Sumudu. Hasil adalah solusi persamaan Black-Scholes yang dinyatakan sebagai

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, t) = Q(x, t) - p(S^{-1}[u^\alpha S[L \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, t) + \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u)]]). \quad \text{dengan } H_n \text{ polinomial Hesse}$$

$$H(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} [N(\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_i)]$$

, N adalah operator turunan non linier.

3.4 Metode dekomposisi Adomian.

Dalam tulisan Ghandehari dan Ranjbar dengan judul *European Option Pricing Model Black-Scholes Fraksional: Approach via Expansion in Series* (2014), tujuannya adalah mencari solusi persamaan Black-Scholes Fraksional dengan metode dekomposisi Adomian. Alat-alat yang digunakan yaitu operator integral fraksional Riemann-Liouville, turunan fraksional

Caputo, dan fungsi Mittag Leffler. Berikut ini adalah ilustrasi dari metode dekomposisi Adomian:

Andaikan persamaan diferensial fraksional non linear dinyatakan sebagai

$$D_t^\alpha V(x, t) + R[x]V(x, t) + N[x]V(x, t) = 0 \quad t > 0, x \in R, 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.6)$$

$$V(x, 0) = g(x)$$

dengan $R[x]$ adalah operator linear, $N[x]$ operator linear umum.

Bentuk (6) dapat ditulis sebagai

$$D_t^\alpha V(x, t) = -\mathcal{L}[x] * V(x, t)$$

(3.7)

dengan $\mathcal{L}[x] = R[x] + N[x]$

Dengan menggunakan hubungan operator Riemann-Liouville dan operator diferensial fraksional Caputo dan dengan menggunakan operator $D_t^{-\alpha}$ akan diperoleh

$$V(x, t) = V_0(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x, t)$$

(3.8)

dengan $V_0(x, t) = g(x)$. Substitusi (3.8) ke (3.7) diperoleh

$$V_{n+1}(x, t) = D_t^{-\alpha}(-\mathcal{L}[x] * V_n(x, t))$$

(3.9)

3.5 Konvergensi Metode Dekomposisi Adomian.

Berikut ini adalah masalah konvergensi deret dekomposisi. Perhatikan persamaan Black-Scholes fraksional

$$V_t^\alpha + ax^2 V_{xx} + bxV_x - rV = 0 \quad 0 < \alpha \leq 1$$

dengan $a = \frac{\sigma^2}{2}$, $b = r$ dan kondisi awal $V(x, 0) = g(x)$.

Dengan menggunakan persamaan (3.6), (3.7) dan (3.8)

$$V_0(x, t) = g(x)$$

$$V_{n+1}(x, t) = ((-\mathcal{L}[x])^n g(x)) D_t^{-\alpha} \left(\frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)} \right)$$

sehingga

$$V(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)} (-1)^k (\mathcal{L}^k[x] * g(x))$$

dengan $\mathcal{L}[x]=ax^2D_{xx}+bxD_x - r$
 $V(x, t)=E_{\alpha}(-t^{\alpha} \mathcal{L}[x]*g(x))$

3.6 Metode dekomposisi Laplace Adomian.

Secara umum persamaan diferensial parsial non linear berorde dua dengan kondisi awal dapat di tuliskan dalam bentuk:

$$Lu(x, t) + Ru(x, t) + Nu(x, t) = h(x, t),$$

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$u_t(x, 0) = g(x)$$

dengan

- L : operator diferensial order dua
- R : operator linear
- N : operator diferensial non linear

Kemudian gunakan transformasi Laplace kedua sisi

$$\mathcal{L}[Lu(x, t)] + \mathcal{L}[Ru(x, t)] + \mathcal{L}[Nu(x, t)] = \mathcal{L}[h(x, t)]$$

$$s^2 \mathcal{L}[u(x, t)] - sf(x) - g(x) + \mathcal{L}[Ru(x, t)] + \mathcal{L}[Nu(x, t)] = \mathcal{L}[h(x, t)]$$

sehingga:

$$\mathcal{L}[u(x, t)] = \frac{f(x)}{s} + \frac{g(x)}{s^2} - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[Ru(x, t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[Nu(x, t)] + \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[h(x, t)]$$

Langkah berikutnya adalah metode dekomposisi Laplace merepresentasikan solusi sebagai deret tak hingga

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

Operator non linear dinyatakan sebagai:

$$Nu(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x, t)$$

dengan

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [N(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i)]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}[u_0(x, t)] = \frac{f(x)}{s} + \frac{g(x)}{s^2} - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[Ru(x, t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x, t)] + \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[h(x, t)]$$

$$\mathcal{L}[u_0(x, t)] = k_1(x, s)$$

$$\mathcal{L}[u_1(x, t)] = k_2(x, s) - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[R_0 u(x, t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[A_0(x, t)]$$

$$\mathcal{L}[u_{n+1}(x, t)] = - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[R_n u(x, t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[A_n(x, t)]$$

Kemudian diambil invers Laplace-nya diperoleh:

$$u_0(x, t) = k_1(x, t)$$

$$u_1(x, t) = k_2(x, s) - \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2} [R_0 u(x, t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[A_0(x, t)]]$$

$$u_{n+1}(x, t) = - \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2} [R_n u(x, t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[A_n(x, t)]]$$

$$u(x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k u_n(x, t)$$

3.7 Konvergensi Analisis Metode Adomian-Laplace

Diberikan ruang Hilbert H yang didefinisikan sebagai berikut:

$$H = L^2(\alpha, \beta) \times [0, T] \quad \text{dan}$$

$$u: (\alpha, \beta) \times [0, T] \rightarrow R$$

dengan

$$\int_{(\alpha, \beta) \times [0, T]} u^2(x, s) ds d\tau < \infty$$

Metode Adomian-Laplace yang dimodifikasi konvergen bila memenuhi dua sifat berikut:

(H1) $\langle L(u) - L(v), u - v \rangle \geq k \|u - v\|^2$; $k > 0$, untuk setiap $u, v \in H$

(H2) Untuk setiap $M > 0$ terdapat konstan $C(M) > 0$ sedemikian untuk setiap $u, v \in H$ dengan $\|u\| \leq M, \|v\| \leq M$ diperoleh $\langle L(u) - L(v), u - v \rangle \leq C(M) \|u - v\| \|w\|$ untuk setiap $w \in H$

3.8 Kebaruan penelitian dengan topik persamaan Black-Scholes Fraksional

Untuk melihat kebaruan penelitian mengenai topik persamaan Black-Scholes Fraksional terkait usulan riset digunakan kata kunci “*modified*” Black-Scholes “*fractional*” pada *publish* and *ferish*. Pencarian dibatasi untuk paper yang terbit pada rentang tahun 2015-2020 sebanyak 100 paper. Dari hasil yang diperoleh, terdapat bahwa topik yang telah dibahas adalah pencarian solusi persamaan Black-Scholes fraksional dengan menggunakan metode transformasi sumudu, homotopi dan secara numerik yaitu dengan finite difference method. Sebagian besar yang dibahas adalah mengenai solusi persamaan Black-Scholes atau tentang

terapan persamaan Black-Scholes berkaitan dengan masalah option pricing. Berdasarkan hasil yang diperoleh dengan menggunakan *publish and ferish* seperti yang ditampilkan di Tabel 2.1, Tabel 2.2, Tabel 2.3, dan Tabel 2.4, dapat dilihat bahwa belum ada yang membahas tentang topik analisis persamaan Black-Scholes fraksional yang dimodifikasi.

Hasil di atas kemudian diolah dengan menggunakan *VOS Viewer* untuk melihat pemetaan topik pada artikel-artikel tersebut. Ilustrasi hasil pemetaan topik menggunakan *VOS Viewer* terkait persamaan Black-Scholes fraksional yang dimodifikasi ditunjukkan pada Gambar 2.1. Berdasarkan hasil tersebut dapat dilihat bahwa penelitian yang berkaitan dengan persamaan Black Scholes Fraksional biasanya terkait dengan pemodelan masalah opsi, metode untuk mencari solusi persamaan Black Scholes fraksional. Sementara itu juga dapat dilihat bahwa penelitian tentang pemodelan opsi Eropa dengan menggunakan kalkulus fraksional belum begitu banyak.

Berdasarkan pada plot warna pada Gambar 2.3 penelitian tentang model gerak Brown, model persamaan Black-Scholes fraksional, model persamaan Black-Scholes fraksional waktu, model opsi Eropa dengan menggunakan kalkulus fraksional bisa dikatakan belum banyak (sedikit). Hal ini bisa dilihat dari warna yang melingkupi topik-topik tersebut yang berwarna hijau muda tipis.

Tabel 3.1. Pencarian topik riset dengan *publish and ferish* 1

The screenshot shows a Google Scholar search interface with the search term 'fractional Black-Scholes'. The results table is as follows:

Publication name	Year	Cites	Peer review	Rank	Title
Journal of Applied Mathematics	2015	19	Yes	1	A modified numerical scheme and convergence analysis for fractional model of Lévy's equation
Journal of Applied Mathematics	2015	19	Yes	2	Application of non-homogeneous heat model with non-constant diffusion coefficient
Journal of Applied Mathematics	2015	19	Yes	3	European call option pricing model of fractional order singular kernel
Journal of Applied Mathematics	2015	19	Yes	4	Legendre spectral element method for solving time fractional modified nonlinear sub-diffusion equation
Journal of Applied Mathematics	2015	19	Yes	5	A different approach to the European option pricing model with fractional operator
Journal of Applied Mathematics	2015	19	Yes	6	Analytical solutions of the Black-Scholes pricing model for European option valuation via a projected differential transformation method
Journal of Applied Mathematics	2015	19	Yes	7	The numerical simulation of the tempered fractional Black-Scholes equation for European double barrier option
Journal of Applied Mathematics	2015	19	Yes	8	A novel solution method for initial boundary value problems of fractional order with conformable differentiation
Journal of Applied Mathematics	2015	19	Yes	9	Analytical pricing double barrier options based on a time-fractional Black-Scholes equation
Journal of Applied Mathematics	2015	19	Yes	10	Numerical solution of the time-fractional Black-Scholes model governing European options
Journal of Applied Mathematics	2015	19	Yes	11	Fractional modified Landau equation with Volterra-Lévy law
Journal of Applied Mathematics	2015	19	Yes	12	A new iterative method based solution for fractional Black-Scholes option pricing equations (BSOP)
Journal of Applied Mathematics	2015	19	Yes	13	Connection to Black-Scholes formula due to fractional stochastic volatility
Journal of Applied Mathematics	2015	19	Yes	14	Analytic and numerical solutions of time-fractional Black-Scholes equation
Journal of Applied Mathematics	2015	19	Yes	15	Analytical solution of the time-fractional Black-Scholes model for stock option valuation on no-dividend yield basis
Journal of Applied Mathematics	2015	19	Yes	16	Numerically pricing double barrier options in a time-fractional Black-Scholes model

Berdasarkan Tabel 3.1, dapat dilihat bahwa sebagian besar judul paper yang diperoleh adalah mengenai solusi persamaan Black-Scholes baik secara analitik dan numeric. Secara analitik dengan menggunakan metode transformasi diferensial, sedangkan secara numeric dengan menggunakan metode Kernel singular, metode *element Legendre*. Jelas bahwa untuk topic mengenai persamaan Black-Scholes fraksional yang dimodifikasi tidak terdapat pada Tabel 2.1.

Tabel 3.2. Pencarian topik riset dengan *publish and ferish* 2

The screenshot shows a Google Scholar search interface with the search term 'fractional Black-Scholes'. The results table is as follows:

Publication name	Year	Cites	Peer review	Rank	Title
Journal of Applied Mathematics	2017	6	Yes	1	Numerical solution of time-fractional Black-Scholes equation
Journal of Applied Mathematics	2017	6	Yes	2	A computational method based on the moving least-squares approach for pricing double barrier options in a time-fractional Black-Scholes model
Journal of Applied Mathematics	2017	6	Yes	3	A high accuracy numerical method and its convergence for time-fractional Black-Scholes equation governing European options
Journal of Applied Mathematics	2017	6	Yes	4	Generalized differential transform method for fractional partial differential equation from finance
Journal of Applied Mathematics	2017	6	Yes	5	Numerical approximation of a time-fractional Black-Scholes equation
Journal of Applied Mathematics	2017	6	Yes	6	Coupled Method for Solving Time-Fractional Navier-Stokes Equation
Journal of Applied Mathematics	2017	6	Yes	7	Modified fractional thermodynamic model with multi-valuation levels of higher order: application to spherical cavity exposed to a harmonic varying heat
Journal of Applied Mathematics	2017	6	Yes	8	Fractional functional with non-occurrence of entropy and asymptotic optimal change of debt in the Black-Scholes model
Journal of Applied Mathematics	2017	6	Yes	9	Arbitrage with fractional Lévy processes
Journal of Applied Mathematics	2017	6	Yes	10	Black-Scholes option pricing equations described by the Caputo generalized fractional derivative
Journal of Applied Mathematics	2017	6	Yes	11	A new option pricing method in American options under fractional Black-Scholes model
Journal of Applied Mathematics	2017	6	Yes	12	Selection of shape parameter in radial basis functions for solution of time-fractional Black-Scholes model
Journal of Applied Mathematics	2017	6	Yes	13	Numerically pricing American options under the generalized modified fractional Boussinesq reaction model
Journal of Applied Mathematics	2017	6	Yes	14	Fractional Black-Scholes equation
Journal of Applied Mathematics	2017	6	Yes	15	Numerical methods for pricing American options with time-fractional PDE models
Journal of Applied Mathematics	2017	6	Yes	16	Series representation of the pricing formula for the European option given by space-time fractional diffusion

Berdasarkan Tabel 3.2, diperoleh bahwa sebagian besar membahas solusi numeric dari model Black-Scholes fraksional maupun solusi persamaan diferensial fraksional waktu. Terdapat pula solusi analitik dari persamaan diferensial fraksional. Sedangkan topic mengenai persamaan Black-Scholes fraksional

yang dimodifikasi tidak terdapat pada Tabel 3.2.

Tabel 3.3. Pencarian topik riset dengan *publih and ferish 3*

The screenshot shows search results for 'fractional Black-Scholes' on Google Scholar. The results table includes columns for publication year, author, title, and citation count. Key entries include:

Year	Author	Title	Citations
2018	Y. G. G. et al.	Application of new Adomian transform method and modified fractional homotopy analysis transform method for fractional Fokker-Planck equation	1
2017	A. A. et al.	New numerical technique for solving fractional partial differential equations in conformable sense	1
2017	A. A. et al.	Fractional Levy stable motion: Finite difference derivative time-stepping model	1
2017	A. A. et al.	Color-multiplexed independent control of a fractional-order van der Pol oscillator	1
2017	A. A. et al.	Analytic properties of American option prices under a modified Black-Scholes equation with spatial fractional derivative	1
2017	A. A. et al.	Black pulse operational matrix method for solving fractional Black-Scholes equation	1
2017	A. A. et al.	Pricing European option under fractional Black-Scholes model with a novel power function	1
2017	A. A. et al.	A novel analytical technique for the solution of time-fractional variational option pricing model	1
2017	A. A. et al.	Analytical Solutions of 2-D Time-Fractional Stochastic Dimensional Physical Models Using Modified Decomposition Method	1
2017	A. A. et al.	A modified fractional Black-Scholes model with a single log put and a different fractional order	1
2017	A. A. et al.	Pricing European option under fractional Black-Scholes model with a novel power function	1
2017	A. A. et al.	Analyzing time-fractional model option via efficient local methods method	1
2017	A. A. et al.	Conformable decomposition for analytical solutions of a time-fractional one-factor risk-neutral model for bond pricing	1
2017	A. A. et al.	A reliable treatment of residual-zero series method for time-fractional Black-Scholes European option pricing equation	1
2017	A. A. et al.	Fast numerical evaluation of new time-space fractional option pricing model governing European call option	1
2017	A. A. et al.	Fourth order compact schemes for space-fractional advection-diffusion reaction equations with variable coefficients	1
2017	A. A. et al.	European option pricing of fractional Black-Scholes model using Sumudu transform and its derivatives	1

Berdasarkan Tabel 3.3, diperoleh bahwa terdapat teknik numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial fraksional, metode matriks operasional *Block Pulse* untuk menyelesaikan persamaan Black-Scholes fraksional, beserta metode transformasi Sumudu untuk menyelesaikan persamaan Black-Scholes fraksional. Topik persamaan Black-Scholes Fraksional yang dimodifikasi tidak terdapat dalam Tabel 2.3.

Tabel 3.4 Pencarian topik riset dengan *publih and ferish 4*

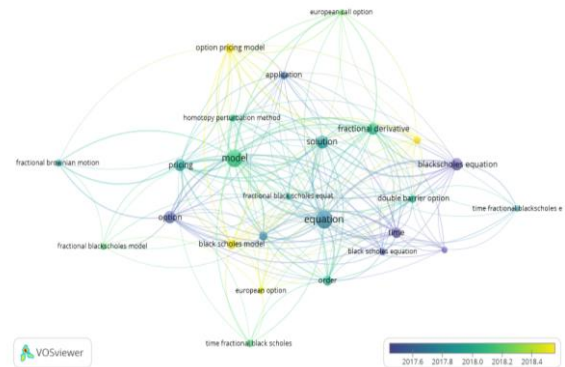
The screenshot shows search results for 'fractional Black-Scholes' on Google Scholar. The results table includes columns for publication year, author, title, and citation count. Key entries include:

Year	Author	Title	Citations
2017	A. A. et al.	A computational method to price with transaction costs under the nonlinear Black-Scholes model	20
2017	A. A. et al.	Exact Solution of Fractional Black-Scholes European Option Pricing Equations	20
2017	A. A. et al.	New Version of Black-Scholes Equation Presented by Time-Fractional Derivative	20
2017	A. A. et al.	Finite difference methods of the spatial fractional Black-Scholes equation for a European call option	20
2017	A. A. et al.	The pricing and numerical analysis of lookback options for mixed fractional Brownian motion	20
2017	A. A. et al.	A Gaussian Markov alternative to fractional Brownian motion for pricing financial derivatives	20
2017	A. A. et al.	Approximation of time-fractional Black-Scholes equation via radial basis functions	20
2017	A. A. et al.	Solutions of time-fractional Black-Scholes European option pricing equation arising in financial market	20
2017	A. A. et al.	Analytical solutions of a 1D time-fractional coupled Burger equation via fractional complex transform	20
2017	A. A. et al.	Stochastic Black-Scholes equation with time-fractional derivative via the finite line	20
2017	A. A. et al.	A class of stochastic partial difference methods for time-space fractional Black-Scholes equation	20
2017	A. A. et al.	Stochastic fractional Black-Scholes model for pricing currency options under transaction costs	20
2017	A. A. et al.	Homotopy pricing American options under the modified Black-Scholes equation with a spatial fractional derivative	20
2017	A. A. et al.	An approximate analytical solution approach for solving time-fractional Black-Scholes option pricing equation	20
2017	A. A. et al.	Solving Black-Scholes equations using fractional generalized homotopy analysis method	20
2017	A. A. et al.	An adaptive moving mesh method for a time-fractional Black-Scholes equation	20

Berdasarkan Tabel 3.4 diperoleh bahwa terdapat paper solusi eksak dari persamaan Black-Scholes untuk masalah opsi Eropa, metode finite difference untuk persamaan Black-Scholes Fraksional dari opsi call tipe Eropa, solusi analitik persamaan Burger fraksional waktu via

transformasi kompleks fraksional, solusi numerik persamaan Black-Scholes dengan menggunakan turunan fraksional spasial. Nampak bahwa topik analisis persamaan Black-Scholes fraksional yang dimodifikasi tidak ada pada Tabel 3.4.

Berdasarkan hasil dari *publih and ferish* yang sudah diperoleh pada Tabel 3.1, Tabel 3.2, Tabel 3.3 dan Tabel 3.4, menggunakan *VOS Viewer* dapat diperoleh pemetaan penelitian yang dinyatakan pada Gambar 2.1.

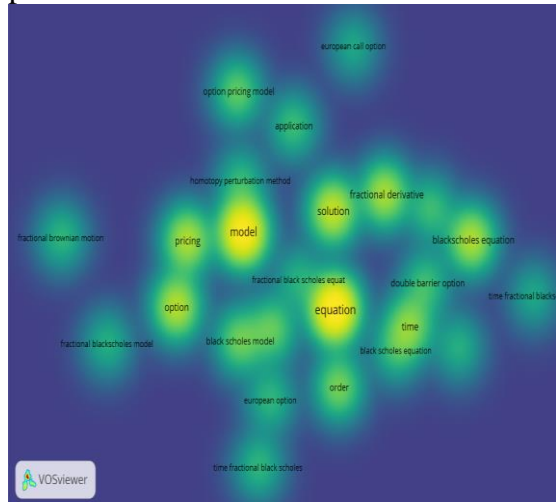


Gambar 2.1. Hasil pemetaan topik penelitian

Berdasarkan Gambar 2.1, diperoleh bahwa topik yang banyak diteliti adalah persamaan Black-Scholes, hal ini ditandai dengan bulatan yang cukup besar dibandingkan dengan yang lainnya. Penelitian mengenai persamaan Black-Scholes dilakukan pada tahun 2017 yang ditandai oleh bulatan besar berwarna biru, sedangkan untuk penelitian mengenai solusi persamaan Black-Scholes fraksional masih belum begitu banyak dilakukan. Hal ini dapat dilihat dengan bulatan yang tidak begitu besar dan berwarna hijau. Sedangkan yang belum banyak diteliti dan termasuk baru adalah topic mengenai persamaan Black-Scholes fraksional terkait dengan masalah opsi. Berdasarkan Gambar 2.1, dapat dilihat bahwa topic mengenai analisis persamaan Black-Scholes

fraksional yang dimodifikasi belum diteliti.

Berdasarkan dari *VOS Viewer* kemudian digambarkan plot warna topik-topik penelitian yang hasilnya dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Berdasarkan Gambar 2.2, diperoleh bahwa gambar yang berwarna kuning terang menunjukkan bahwa penelitian mengenai persamaan Black-Scholes telah banyak dilakukan. Sedangkan topik mengenai model persamaan Black-Scholes fraksional beserta solusinya masih sedikit dilakukan. Hal ini dapat dilihat dari warna hijau muda yang masih samar samar. Demikian pula topik mengenai aplikasinya. Dapat dilihat bahwa topik mengenai analisis persamaan Black-Scholes fraksional yang dimodifikasi belum ada pada Gambar 2.2, Sehingga penelitian mengenai topik analisis persamaan Black-Scholes fraksional yang dimodifikasi masih terbuka untuk dilakukan.

SIMPULAN DAN SARAN

Adapun solusi dari persamaan Black-Scholes Fraksional adalah $(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{\tau^{nq}}{\Gamma(qn+1)}$ yang merupakan deret tak hingga fungsi Mittag-Leffler. Masih banyak yang bisa dikerjakan untuk materi penelitian lebih lanjut misalkan mengenai masalah eksistensi dan

ketunggalan solusi dari persamaan Black-Scholes Fraksional, mencari opsi *call* dan *put* dan arti dari orde persamaan Black-Scholes dalam masalah ekonomi dan matematika keuangan. Bisa juga diteliti untuk analisis persamaan Black-Scholes Fraksional yang dimodifikasi.

DAFTAR PUSTAKA

- Ahmed & Abdusalam, (2004), On Modified Black-Scholes Equation, *Chaos, Solutions and Fractals*, Volume 22, Number 8, 583-587.
- Aguilar J.P & Korbel J.,(2017), Option Pricing Model Driven by the space time fractional Diffusion, *Series Representation and Application Volume 20, Number 8, 1-15*
- Batogna, R.G., (2018), *Analysis of Option Pricing Within The Scope Of Fractional Calculus*, Afrika Selatan: *Departement of Mathematics and Applied Mathematics Faculty of Natural and Agricultural Science at the University of the Free State*.
- Belgacem & Karaballi, (2005), Sumudu Transform Fundamental Properties Investigation and Applications, *Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, Volume 2006, Number 10, Article ID 9108, 1-23.
- Elbeleze, A.A., Kihcman, & Taib, B.M., (2013), Homotopy Perturbation Method for Fractional Black-Scholes European Option Pricing Equations Using Sumudu Transform, *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering Volume 2013 Number 10*, Article ID 524852, 1-7.
- Eltayeb, H., & Kihcman, A., (2010), A Note On the Sumudu Transform and Differential Equations, *Applied Mathematical Sciences*, Volume 4, Number 22, 1089-1098.
- Febrianti, W., (2018), Penentuan Harga Opsi Dengan Model Black-Scholes Menggunakan Metode Beda Hingga

- Forward the Central Space, *Journal Of Fundamental Mathematics and Applications, Volume I, Number I*, 45-61.
- Ghaedahari & Ranjbar, (2014), European Option Pricing of Fractional Version of the Black-Scholes Model Approach Via Expansion in Series, *International Journal of Non Linear Science, Volume 17, Number 2*, 105-110.
- Gupta & Jain, (1986), *Lebesgue Measure And Integration*, Canada: Wiley Eastern Limited.
- Kaya, F., & Yilmaz, Y., (2019), Basic Properties of Sumudu Transformation and Its Application to Some Partial Differential Equations, *Sakarya University Journal of Science, Volume 23, Number 4*, 509-514.
- Khaeruddin & Massalesse, (2008), Penentuan Harga Opsi Eropa Menggunakan Persamaan Black-Scholes, *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi, Volum 4 ,Number 2*, 104-116.
- Khan, A.W., (2016), European Pricing of Fractional Black-Scholes Model Using Sumudu Transform and its Derivatives (General Letters In Mathematics), *General Letters In Mathematics, Volume 1, Number 3*, Desember 2016, 74-80.
- Khan, A.W., & Ansari, F.A., (2016), European Option Pricing of Fractional Black-Scholes Model Using Sumudu Transform and is Derivative, *General Letters in Mathematics, Volume 1, Number 3* December 2016, 74-80.
- Khan, Y., and Qingbiao, W.U., (2011), Homotopy Perturbation Transform Method for Nonlinear Equation using He's Polynomials, *Computers and Mathematics with Applications, Volume 61, Number 10*, 1963-1967.
- Kanth, A.S.V.R., & Aruna, K., (2016), Solution of Time fractional Black-Scholes European option pricing equation arising in financial market, *Non Linear Engineering, Volume 5, Number 4*, 269-176.
- Kreyszeig, E., (1978), *Introductory Functional Analysis With Applications*, Canada: John Wiley and Sons.
- Kumar, A., Yildirin & Khan, (2012), Analitical solution of fractional Black-Scholes European Option Pricing Equation by Using Laplace Transform, *Journal of Fractional Calculus and Applications, Volume 2 Number 8*, 1-9.
- Lasota, A., & Mackey, (1994), *Chaos, Fractals, and Noise : Stochastic Aspect Of Dynamic*, Applied Mathematical Science, Vol. 97, Berlin: Springer-Verlag.
- Mathai, H.J., & Haubold, H.J., (2017), *An Introduction to Fractional Calculus*, New York: Nova Science Publisher Inc.
- Mishra, R., Aggarwal, Chaundari, L., & Kumar, A., (2020), Relationship Between Sumudu and Some Efficient Integral Transform, *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering (IJITEE), Volume 9, Number 3*, 153-159.
- Mohebbi, M.A., & Ranjbar, M., (2014), European Option Pricing of Fractional Black-Scholes Model with New Lagrange Multipliers, *Computational Methods for Diffrenetial Equations, Volume 7,,Number 2*, ,hal 171-178.
- Naghipour, A., & Manafian, J., (2015), Application of the Laplace Adomian Decomposition and Implicit Methods for Solving Burger's equation, *Journal Pure Appl Math Volume.6.Number.1*, 68-77.
- Omer, E.M., (2017) , Double Laplace Transform and Double Sumudu Transform , *American Journal of Engineering Research, Volume 6, Issue 5*, 312-317.
- Ozkan, O., & Kurt, A., (2019), A New Method for Solving Fractional Partial Differential Equation, *The Journal of Analysis, Volume 87, Number 12*, 2786-2797,
- Pinsky, A., (1998), *Partial Differetnyial Equations and Boundary Value Problem With Applications*, New York: MC Graw-Hill.

- Ranjbar & Ghandehari, (2015), Barrier Options Pricing of Fractional Version of the Black-Scholes Model, *International Journal Industrial Mathematics, Volume 7, Number 2*, Article ID IJIM, 105-110.
- Royden, H.L., (1989), *Real Analysis Third Edition*, New York: Macmillan Publishing.
- Sefira, Rusyaman, E., & Sukono, (2019), Methods to Solve Fractional Black-Scholes, *Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Operations Management Pilsen, Czech Republic*, July 23-26, 2019.
- Siswanto, Purnomo, D.K., & Kusbidono, (2014), Penentuan Harga Opsi Model Black-Scholes Menggunakan Metode Beda Hingga Dufort-Frankel, *Prosiding Seminar Nasional Matematika Universitas Jember*, 329-334.
- Sumiati, I., Rusyaman, E., & Sukono, (2019), Black-Scholes Equation Solution Using Laplace -Adomian Decomposition Method, *IAENG International Journal Of Computer Science, Volume 6, Number 4, IJCS_46_4_2*, 1-6.
- Taib, Kichman. A., & Elbelese, (2013), Homotopy Perturbation Method for Fractional Black-Scholes European Option Pricing Equations Using Sumudu Transform, *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problem in Engineering, Volume 2013*, Article id 524852, 7 pages, 1-7.
- Uddin, M., & Taufiq, M., (2019), Approximation of Time Fractional Black-Scholes Equation Via Radial, Kernels and Transformation, *Fractional Differential Calculus, Volume 9, Number 1*, 75-90.
- Yavuz, M., & Ozdemir, N., (2018), A Quantitative Approach to Fractional Option Pricing Problems with Decomposition Series, *Konuralp journal of Mathematics, Volume 6, Number 1*, 102-109.
- Walters, P., (1982), *An Introduction to Ergodic Theory*, New York: Springer-Verlag.